

Część 2. Przepływ ciepła

dr inż. Piotr Niemiec

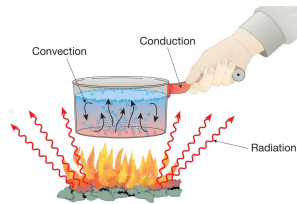
Katedra Chemiii
Wydział Matematyczno-Przyrodniczy
Akademia Tarnowska

O czym to będzie ?

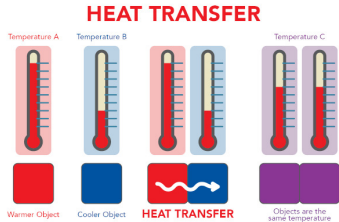
Termodynamika - nauka o **ilości wymienianego ciepła** gdy układ przechodzi z jednego stanu do drugiego;

Inżynieria chemiczna - nauka o **szybkości przenoszonoego ciepła** (*rate of heat transfer*);

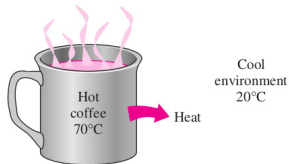
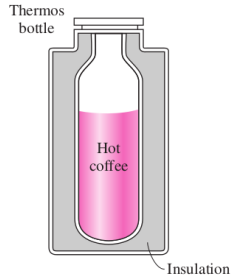
Sposoby przenoszenia ciepła:



- przewodzenie - przeniesienie energii od wyżej energetycznych cząsteczek do mniej energetycznych na skutek wzajemnych oddziaływań;
- konwekcja - przeniesienie energii pomiędzy ciałem stałym a przepływającym płynem (przewodzenie + przepływ płynu);
- promieniowanie - energia emitowana w postaci fal elektromagnetycznych (lub fotonów) przez materię w wyniku zmian jej struktury elektronowej.



- Przepływ ciepła przebiega **zawsze** od temperatury wyższej do temperatury niższej do momentu wyrównania obu temperatur;
- Ciepło - sposób przenoszenia energii z jednego układu do drugiego w wyniku różnicy temperatur (ΔT);
- Energia może występować w różnych formach



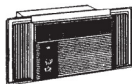
Projektowanie np. termosu/kubka termicznego do kawy:

- np. dla kawy $\Delta T = 90^{\circ}\text{C} - 80^{\circ}\text{C}$;
- termodynamika - ilość wydzielonego ciepła (procesy równowagowe);
 - 1ZT: szybkość pobierania Q = szybkość oddawania Q ;
 - 2ZT: transfer ciepła w kierunku malejącej temperatury;
- inżynieria - jak szybko ciepło jest przenoszone (nierównowagowe);
 - wymagane ΔT - **siła napędowa procesu wymiany ciepła**;
 - szybkość przepływu ciepła wprost proporcjonalna do **gradientu temperatury**;

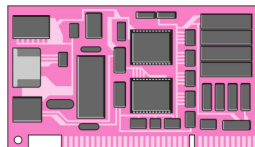
Zastosowania inżynierii cieplnej



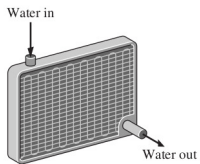
The human body



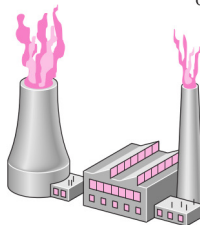
Air-conditioning systems



Circuit boards



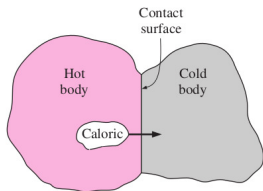
Car radiators



Power plants



Refrigeration systems

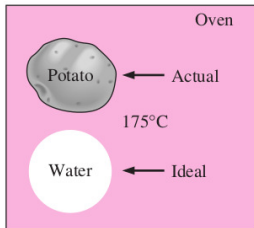


- teoria kinetyczno-molekularna: atomy/cząsteczki jako sztywne kulki w nieustannym ruchu (E_k) - ciepło jako miara przypadkowości ruchów;
- A. Lavoisier - *caloric theory*:
 - ciepło jako coś "płynopodobnego" (*ang. caloric*)
 - bez: masy, koloru, zapachu i smaku;
 - mogące przepływać z jednego ciała do drugiego;
 - "±" *caloric* - wzrost/spadek temp. ciała
 - płyn i para nasycona
- B. Thompson - ciepło generowane przez tarcie (brak płynu)
- J. P. Joule - ciepło nie jest substancją

Problemy inżynierii przenoszenia ciepła w ujęciu konstruktorskim:

- 1 szybkość - określenie szybkości przepływu ciepła przy danej ΔT ;
- 2 rozmiar - określenie rozmiaru urządzenia w celu dostarczenia określonej ilości ciepła w odpowiednim czasie przy ustalonej ΔT ;

Badania:



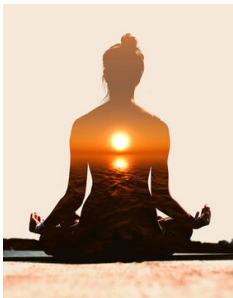
- eksperymentalne:
 - realny układ pomiarowy;
 - mierzymy wszystko co chcemy (warunki pracy);
 - kosztochłonne, czasochłonne, niepraktyczne (np. instalacja grzewcza);
- analityczne (równania różniczkowe/metody numeryczne):
 - szybka, tania, zależna od poziomu i ilości założeń (model)

Energia (całkowita E) może istnieć w postaci:

- termicznej;
- mechanicznej;
- kinetycznej;
- potencjalnej;
- elektrycznej;
- magnetycznej;
- **wewnętrzna** (U);

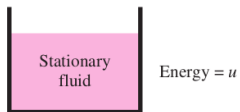
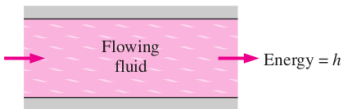
Najczęściej używane jednostki energii:

- joule [J],
- British thermal unit [Btu]
Def.: 1 lbm H_2O o $t=60^{\circ}F$ o $1^{\circ}F$,
 $1 \text{ Btu} = 1,055056 \text{ kJ}$,
- kaloria [cal]
Def.: 1 g H_2O o $1^{\circ}C$,
 $1 \text{ cal} = 4,1868 \text{ J}$.



Energia wewnętrzna: suma energii kinetycznej i potencjalnej cząsteczek

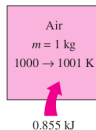
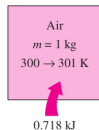
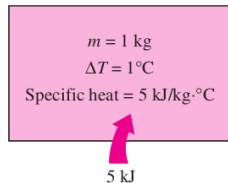
- sensible energy (sensible heat) - stowarzyszona z E_k , $\bar{v} \approx T \implies \uparrow T = \uparrow E_k = \uparrow U$
- latent energy (latent heat) - stowarzyszona z energią oddziaływań międzymolekularnych (przejścia fazowe), $E_{solid} < E_{liquid} < E_{gas}$
- chemical/bond energy - stowarzyszona z energią wiązania atomów w cząsteczce
 - emitowana podczas reakcji chemicznych
- nuclear energy - stowarzyszona z energią wiązania nukleonów w jądrze
 - emitowana podczas reakcji jądrowych



Entalpia: $h = u + Pv$ (wielkości odniesione do jednostki masy)

- u - energia wewnętrzna;
- Pv - praca przepływu - energia niezbędna aby płyn był w ruchu;
- h - energia strumienia płynu;

Energia chemiczna/jądrowa absorbowana/emitowana podczas reakcji chemicznych/jądrowych



Gaz doskonały: $Pv = RT$ lub $P = \rho RT$:

- gaz rzeczywisty $\approx$ gaz doskonały dla niskich gęstości;
- dla $\uparrow T$ i $\downarrow p \implies \downarrow \rho$ - gaz rzeczywisty jak gaz doskonały;

Ciepło właściwe - ilość ciepła wymagana aby podnieść temperaturę substancji o masie 1 kg o 1°C , $[\text{kJ/kg} \cdot \text{K}]$

W zależności od warunków procesu, dla ustalonego:

- v : C_v ;
- p : $C_p = C_v + R$ - układ może zwiększać swoją objętość;
- $C = f(T, p)$, w praktyce $C = f(T)$ dla niskich p ;

Związek pomiędzy C i u oraz h

Dla gazu doskonałego możemy napisać:

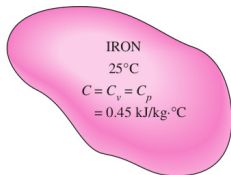
$$du = \overline{C}_v dT \quad \text{ i } \quad dh = \overline{C}_p dT \quad [\text{J/g}]$$

Dla przyrostów skończonych:

$$\Delta u = m\overline{C}_v \Delta T \quad \text{ i } \quad \Delta h = m\overline{C}_p \Delta T \quad [\text{J}]$$

Dla substancji nieściśliwych $C = f(T)$ tylko!

$$C = C_p = C_v \quad [\text{stąd}] \quad \Delta U = m\overline{C} \Delta T \quad [\text{J}]$$



Terminologia:

- heat = thermal energy (heat flow, heat addition, heat rejection, heat absorption, heat gain, heat loss, heat storage, heat generation, electrical heating, latent heat, body heat, heat source)
- heat transfer rate - szybkość przepływu ciepła ($\dot{Q}$) w [J/s = W]

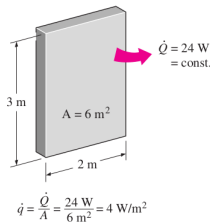
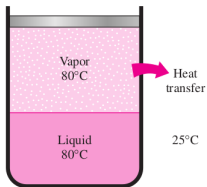
Całkowita ilość ciepła:

$$Q = \int_0^{\Delta t} \dot{Q} dt \quad [\text{J}]$$

heat flux - szybkość przepływu ciepła na powierzchnię:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \quad [\text{W/m}^2]$$

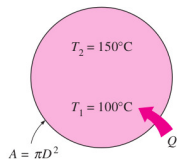
A - powierzchnia przepływu ciepła.



Przykład obliczeniowy - kula miedziana

Dane: $D = 10\text{cm}^3$, $T_1 = 100^\circ$, $T_2 = 150^\circ$, $\tau = 30\text{min} = 1800\text{s}$, $\rho = 8950\text{kg/m}^3$,
 $C_p = 0,395\text{kJ/kg} \cdot \text{K}$. Szukane: a) Q , b) $\dot{Q}$ c) $\dot{q}$. Ilość energii pobranej przez układ =
wzrost energii układ:

Ad a)



$$Q = \Delta U = m\bar{C}(T_2 - T_1) \quad \text{gdzie:} \quad m = \rho V = \frac{\pi}{6}\rho D^3 = \dots = 4,69\text{ kg}$$

$$Q = \Delta U = m\bar{C}(T_2 - T_1) = \dots = 92,6\text{ kJ}$$

Ad. b)

$$\dot{Q} = \frac{Q}{\Delta t} = \dots = 0,0514\text{ kJ/s} = 51,4\text{ W}$$

Ad. c)

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\dot{Q}}{\pi D^2} = \dots = 1636\text{ W/m}^2$$

Pierwsza zasada termodynamiki (zasada zachowania energii)

Energia nie może zostać ani wyprodukowana ani zniszczona, może tylko zmieniać się z jednej formy w drugą.

Całkowita energia pobrana/opuszczająca układ podczas procesu jest równa różnicy energii: wchodzącej do układu (E_{in}) i energii go opuszczającej (E_{out}) w trakcie trwania procesu.

$$E_{in} - E_{out} = \Delta E_{system}$$

Energia może być przenoszona na skutek: ciepła, prac lub przepływu masy, stąd:

$E_{in} - E_{out}$ określa wypadkową zmianę energii.

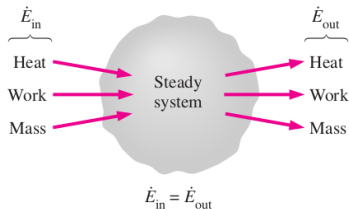
Dla strumieni:

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{system}}{dt}$$

Pierwsza zasada termodynamiki (zasada zachowania energii)

W warunkach ustalonych (stacjonarnych) $\Delta E = 0$:

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$



Przy braku: efektów elektrycznych, magnetycznych, ruchowych
(np. obrotowych) grawitacyjnych czy powierzchniowych (naprężenia):

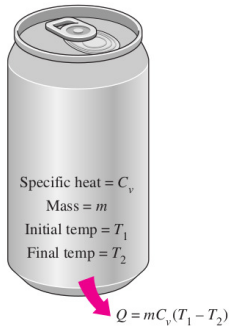
$$\Delta E_{system} = \Delta U_{system}$$

Bilans energetyczny:

$$Q_{in} - Q_{out} + E_{gen} = \Delta E_{thermal,system}$$

E_{gen} - ciepło generowane na skutek przemian chemicznych, jądrowych lub elektrycznych.

Bilans energetyczny układu zamkniętego (closed systems)



Dla stanu stacjonarnego (pozbawionego przepływów):

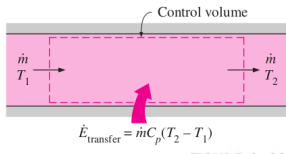
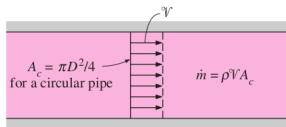
$$E_{in} - E_{out} = \Delta U = mC_v\Delta T$$

Jeżeli dodatkowo układ nie wykonuje pracy, wówczas:

$$Q = mC_v\Delta T$$

Q - całkowita ilość ciepła dostarczona/opuszczająca układ

Bilans energetyczny układu z przepływem masy (steady flow systems)



- kontrolowana objętość (np. chłodnica)
- warunki ustalone ($E_{CV} = \text{const.}$) czyli ($\Delta E_{CV} = 0$) stąd: $E_{in} = E_{out}$
- przepływ masowy:

$$\dot{m} = uA\rho \quad \text{lub} \quad \delta\dot{m} = u\rho\delta A$$

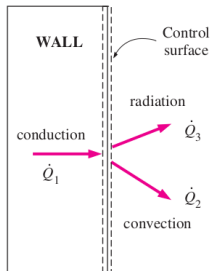
- przepływ objętościowy:

$$\dot{V} = uA = \frac{\dot{m}}{\rho}$$

- dla $w = 0$, i $\Delta E_k = 0$ oraz $\Delta E_p = 0$:

$$\dot{Q} = \dot{m}\Delta h = \dot{m}C_p\Delta T$$

Bilans energetyczny dla powierzchni



Zakładamy, że powierzchnia nie posiada:

- masy, objętości i energii

Bilans energetyczny dla powierzchni:

$$E_{in} - E_{out}$$

Bilans energetyczny dla zewnętrznej ściany budynku:

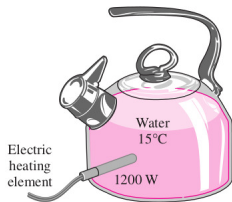
$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 + \dot{Q}_3$$

Przykład - czajnik

Dane: $m = 1,2 \text{ kg}$, $T_1 = 15^\circ\text{C}$, $T_2 = 95^\circ\text{C}$, $P = 1200 \text{ W}$, $m_{cz} = 0,5 \text{ kg}$,
 $C_{cz} = 0,7 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$, $C_w = 4,18 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K}$. Oblicz czas ogrzewania: Δt .

$$E_{in} - E_{out} = \Delta E_{system}$$

$$E_{in} = \Delta U = \Delta U_w + \Delta U_{cz}$$



Ilość energii na podgrzanie wody i czajnika:

$$E_{in} = mC_w\Delta T + m_{cz}C_{cz}\Delta T = \dots = 429,3 \text{ kJ}$$

W oparciu o definicję mocy układamy proporcję:

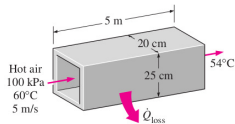
$$1,2 \text{ kJ} - 1 \text{ s}$$

$$429,3 \text{ kJ} - x$$

$$x = 358 \text{ s} \approx 6 \text{ min}$$

Przykład - strata ciepła w kanale grzewczym

Dane: $L = 5\text{ m}$, $a = 0,25\text{ m}$, $b = 0,2\text{ m}$, $p = 100\text{ kPa}$, $T_1 = 60^\circ\text{C}$,
 $T_2 = 54^\circ\text{C}$, $\eta = 80\%$, $u = 5\text{ m/s}$, $c = 0,60\text{ \$/therm}$,
 $1\text{ therm} = 100,000\text{ Btu} = 105,500\text{ kJ}$. Oblicz koszty strat k_{st} .



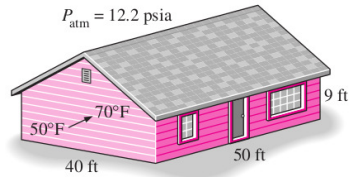
$$\dot{Q} = \dot{m}C_p\Delta T \quad \text{gdzie: } C_p \quad \text{dla} \quad \bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2} \implies C_p = 1,007\text{ kJ/kg } ^\circ\text{C}$$

$$\rho = \frac{p}{RT} = \dots = 1,046\text{ kg/m}^3 \quad A_c = ab = \dots = 0,05\text{ m}^2$$

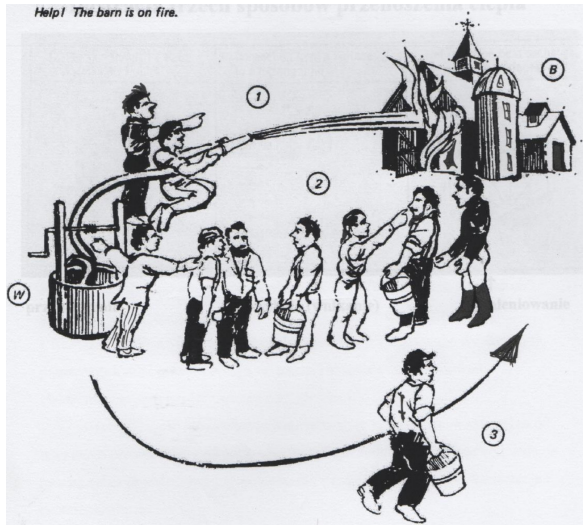
$$\dot{m} = \rho A_c u = \dots = 0,2615\text{ kg/s}$$

$$\dot{Q}_{strat} = \dot{m}C_p(T_{in} - T_{out}) = \dots = 1,580\text{ kJ/s}$$

$$k_{st} = \frac{5688\text{ kJ/h} \cdot 0,60\text{ \$/therm}}{0,80} \cdot \left(\frac{1\text{ therm}}{105,500\text{ kJ}} \right) = 0,04\text{ \$/h}$$



Mechanizmy transportu ciepła



Transport ciepła:

- od T_1 do T_2 , gdzie: $T_1 > T_2$;
- do $T_1 = T_2$;

Podstawowe sposoby przenoszenia ciepła:

- przewodzenie
- konwekcja
- promieniowanie

Przewodzenie - wymiana ciepła między bezpośredni stykającymi się częściami jednego ciała lub różnych ciał polegająca na przekazywaniu energii kinetycznej przez cząsteczki wykonujące ruch mikroskopowy.

- ciała stałe
 - drgania sieciowe + wolne elektrony
- ciecze i gazy
 - zderzenia i dyfuzja przypadkowo poruszających się cząsteczek
- różnica temperatur jako siłą napędową procesu

Szybkość przewodzenia

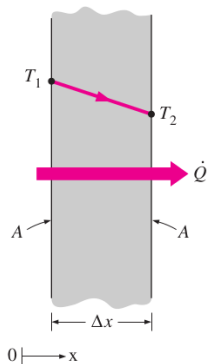
Szybkość przewodzenia zależy od: geometrii (grubość), materiału, różnicy temperatur

Dla przewodzenia ustalonego, gdzie:

- $\Delta x = L$ - grubość,
- A - powierzchnia,
- $\Delta T = T_2 - T_1$,
- $\dot{Q} \times 2$ jak $\Delta T \times 2$;
- $\dot{Q} \times 0,5$ jak $L \times 2$;

Szybkość przewodzenia:

- proporcjonalna do: A i ΔT ;
- odwrotnie proporcjonalna do: L ;



Szybkość przewodzenia

Szybkość przewodzenia zależy od: geometrii (grubość), materiału, różnicy temperatur

Prawo Fouriera:

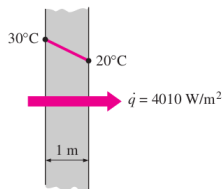
$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad [\text{W}]$$

k - przewodność cieplna, miara zdolności materiału do przewodzenia ciepła;

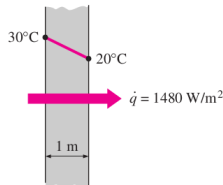
W postaci różniczkowej:

$$\dot{Q} = -kA \frac{dT}{dx} \quad [\text{W}]$$

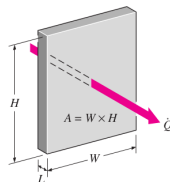
- dT/dx - gradient temperatury,
- A jest zawsze prostopadła do $\dot{Q}$



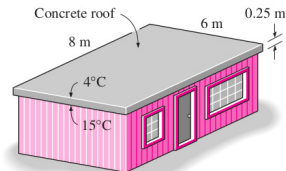
(a) Copper ($k = 401 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$)



(b) Silicon ($k = 148 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$)



Przykład - straty ciepła przez dach płaski



Dane: $s = 6\text{ m}$, $b = 8\text{ mm}$ $c = 0,25\text{ m}$, $k = 0,8\text{ W/m } ^\circ\text{C}$, $T_1 = 15^\circ\text{C}$,
 $T_2 = 4^\circ\text{C}$, $\tau = 10\text{ h}$. Oblicz: a) Szybkość straty ciepła w nocy przez dach,
b) koszt (k) jaki generuje strata jeżeli cena za prąd $c = 0,08\text{ \$/kWh}$.

Ilość ciepła uciekająca przez dach:

$$\dot{Q} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} = \dots = 1,69\text{ kW} \implies Q = \dot{Q}\tau = \dots = 16,9\text{ kWh}$$

Cena za 16,9 kWh:

$$k = Q \cdot c = \dots = 1,35\text{ \$}$$

The thermal conductivities of some materials at room temperature

Material	k, W/m · °C*
Diamond	2300
Silver	429
Copper	401
Gold	317
Aluminum	237
Iron	80.2
Mercury (l)	8.54
Glass	0.78
Brick	0.72
Water (l)	0.613
Human skin	0.37
Wood (oak)	0.17
Helium (g)	0.152
Soft rubber	0.13
Glass fiber	0.043
Air (g)	0.026
Urethane, rigid foam	0.026

*Multiply by 0.5778 to convert to Btu/h · ft · °F.

- $C_{pH_2O} = 4,18 \text{ [kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C]}$ i $C_{pFe} = 0,45 \text{ [kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C]}$
 - woda zmagazynuje ok $\times 10$ więcej energii niż żelazo
- $k_{H_2O} = 0,608 \text{ [W/m} \cdot ^\circ\text{C]}$ i $k_{Fe} = 80,2 \text{ [W/m} \cdot ^\circ\text{C]}$
 - szybkość przewodzenia ciepła w Fe ok $\times 100$ szybsza niż H_2O
- woda jest słabszym przewodnikiem ciepła niż żelazo, ale...
- woda jest lepszym medium gromadzącym ciepło niż żelazo

Z równania Fouriera:

$$k = \frac{\dot{Q}L}{A(T_1 - T_2)}$$

def. k - szybkość przepływu ciepła przez ściankę o:
grubości 1 m, powierzchni 1m^2 przy różnicy temperatur 1°C .

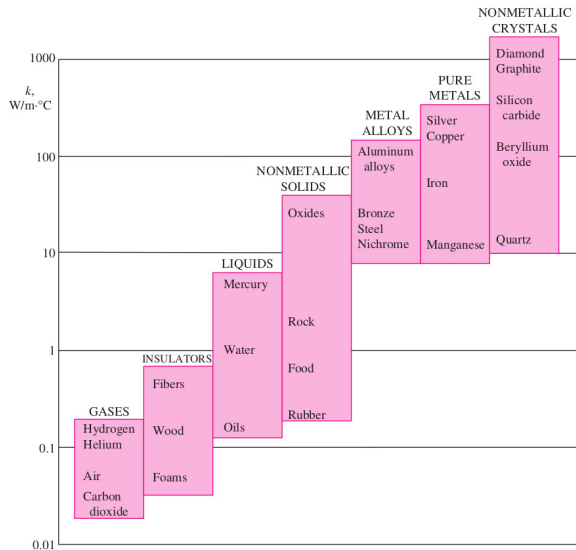
The thermal conductivities of some materials at room temperature

Material	k , W/m · °C*
Diamond	2300
Silver	429
Copper	401
Gold	317
Aluminum	237
Iron	80.2
Mercury (l)	8.54
Glass	0.78
Brick	0.72
Water (l)	0.613
Human skin	0.37
Wood (oak)	0.17
Helium (g)	0.152
Soft rubber	0.13
Glass fiber	0.043
Air (g)	0.026
Urethane, rigid foam	0.026

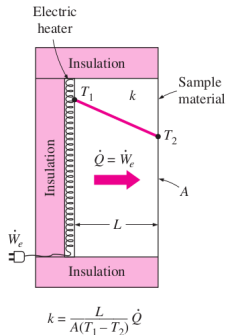
*Multiply by 0.5778 to convert to Btu/h · ft · °F.

- materiał o wysokim k - dobry przewodnik ciepła;
- materiał o niskim k - słaby przewodnik ciepła/izolator;
- np. dla miedzi: $k_{\text{Cu}} = 401 \text{ [W/m} \cdot \text{°C]}$, co oznacza że 401 [J] ciepła jest:
 - przewodzone przez ściankę o grubości 1 m...
 - powierzchni jednostkowej (1 m^2)...
 - i przy różnicy temperatur 1°C ...
 - w czasie 1 s.

Przewodność cieplna dla różnych materiałów



Temperatura jest miarą średniej energii kinetycznej cząstek (atomów, molekuł) danej substancji

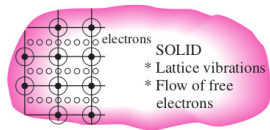
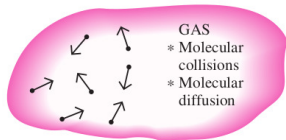


W gazach (cieczach):

- cząsteczki poruszają się chaotycznie;
- ciągle się zderzają;
- przy zderzeniu przekazują sobie część posiadanej energii (E_k);
- $k \approx \sqrt{T}$;
- $k \approx (\sqrt{M})^{-1} \implies k_{He} \gg k_{Ar}$;

Im wyższa jest temperatura, tym cząsteczki poruszają się szybciej $\implies$ częściej się zderzają $\implies$ częściej wymieniają energię $\implies$ lepiej przewodzą ciepło.

Przewodzenie ciepła przez ciała stałe



W ciałach stałych dwa efekty:

- drgania sieci
(jąder/cząsteczek)
 - silna zależność od struktury, np. diament
- przepływ wolnych elektronów

Metale i ich stopy:

- $k_{\text{Fe}} = 83 \text{ [W/m} \cdot ^\circ\text{C]}$
- $k_{\text{Cr}} = 95 \text{ [W/m} \cdot ^\circ\text{C]}$

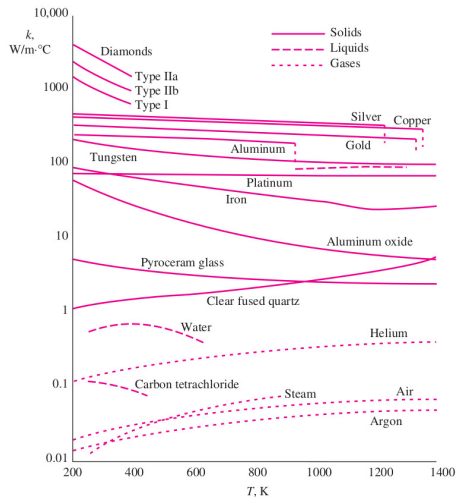
Stal: 99% Fe i 1% Cr:

- $k_{\text{stal}(1\% \text{ Cr})} = 62 \text{ [W/m} \cdot ^\circ\text{C]}$

The thermal conductivity of an alloy is usually much lower than the thermal conductivity of either metal of which it is composed

Pure metal or alloy	k , W/m $\cdot$ $^\circ\text{C}$, at 300 K
Copper	401
Nickel	91
Constantan (55% Cu, 45% Ni)	23
Copper	401
Aluminum	237
Commercial bronze (90% Cu, 10% Al)	52

Zależność k od T



Thermal conductivities of materials vary with temperature

T , K	Copper	Aluminum
100	482	302
200	413	237
300	401	237
400	393	240
600	379	231
800	366	218

Dyfuzyjność cieplna - α

Jest miarą bezwładności cieplnej układu, współczynnik wyrównania (przewodzenia) temperatury, def:

The thermal diffusivities of some materials at room temperature

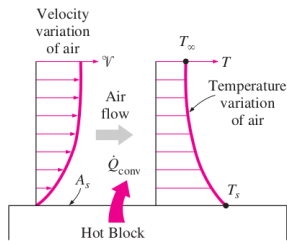
Material	α , m ² /s*
Silver	149×10^{-6}
Gold	127×10^{-6}
Copper	113×10^{-6}
Aluminum	97.5×10^{-6}
Iron	22.8×10^{-6}
Mercury (l)	4.7×10^{-6}
Marble	1.2×10^{-6}
Ice	1.2×10^{-6}
Concrete	0.75×10^{-6}
Brick	0.52×10^{-6}
Heavy soil (dry)	0.52×10^{-6}
Glass	0.34×10^{-6}
Glass wool	0.23×10^{-6}
Water (l)	0.14×10^{-6}
Beef	0.14×10^{-6}
Wood (oak)	0.13×10^{-6}

*Multiply by 10.76 to convert to ft²/s.

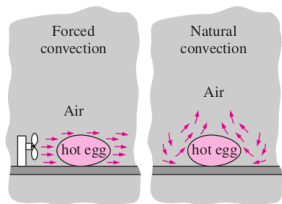
$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$$

- k - charakteryzuje jak dobrze materiał przewodzi ciepło
- ρC_p - pojemność cieplna - ilość ciepła pochłoniętego w jednostce jego objętości
- dla $\uparrow \alpha$: Q w materiale:
 - rozchodzi się szybko, materiał dobrze transportuje;
 - jest słabo zatrzymywane;
- dla $\downarrow \alpha$: Q w materiale:
 - rozchodzi się wolno, słaby transport ciepła;
 - głównie pochłaniane;

Sposób przenoszenia ciepła przez przemieszczające się masy płynu. Ruch konwekcyjny spowodowany jest różnicą gęstości poszczególnych partii płynu, która wynika z różnicy temperatur.



- $\text{im } \uparrow u \implies \uparrow \dot{Q}$;
- ruch masy wspomaga wymianę ciepła;
- dla $u = 0 \implies$ konwekcja = przewodzenie;
- bezpośrednio przy ścianie - przewodzenie;
- przewodzenie + konwekcja = wnikanie (przejmowanie);

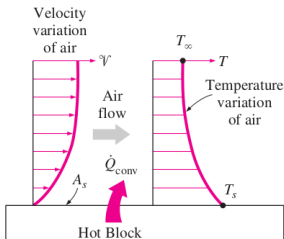


Konwekcja może być:

- wymuszona
 - zewnętrzna siła parcia: np. wiatrak, pompa, wiatr
- naturalna
 - bez siły zewnętrznej, różnica gęstości na skutek różnicy temperatur;

Szybkość przepływu ciepła na drodze konwekcji opisuje prawo Newtona:

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty)$$



h - współczynnik wnikania ciepła, $[\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^\circ\text{C}]$,

A_s - powierzchnia konwekcyjnej wymiany ciepła, $[\text{m}^2]$,

T_s - temperatura powierzchni, $[\text{°C}]$,

T_∞ - temperatura rdzenia płynu, $[\text{°C}]$

Typical values of convection heat transfer coefficient

Type of convection	h , $\text{W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}^*$
Free convection of gases	2–25
Free convection of liquids	10–1000
Forced convection of gases	25–250
Forced convection of liquids	50–20,000
Boiling and condensation	2500–100,000

*Multiply by 0.176 to convert to $\text{Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F}$.

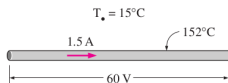
Współczynnik wnikania ciepła h :

- nie jest stałą materiałową!!;
- zależy od rodzaju płynu;
- zależy od rodzaju przepływu płynu;
- zależy od powierzchni wymiany ciepła (rodzaju gładka/chropowata)
- określany jest na drodze doświadczalnej;

Przykład - pomiar współczynnika wnikania h

Dane: drut elektryczny: $L = 2$, $d = 0,3 \text{ cm}$, $T_\infty = 15^\circ \text{C}$, $T = 152^\circ \text{C}$,
 $U = 60 \text{ V}$, $I = 1,5 \text{ A}$. Zakładając jedynie konwekcyjny ruch ciepła oblicz
współczynnik wnikania ciepła h .

Generowana energia na skutek przepływu prądu:



$$\dot{Q} = \dot{E}_{gen} = VI = \dots = 98 \text{ W}$$

$$A_s = \pi dL = \dots = 0,01885 \text{ m}^2$$

Przekształcając równanie Newtona:

$$h = \frac{\dot{Q}}{A_s(T_s - T_\infty)} = \dots = 34,9 \text{ W/m}^2 \text{ } ^\circ \text{C}$$

Energia emitowana przez materię na sposób fal elektromagnetycznych jako wynik zmian struktury elektronowej atomów/cząsteczek. Czynnik gorący i zimny nie muszą się ze sobą bezpośrednio stykać.

- promieniowanie termiczne $\lambda \in (10^{-1} - 10^{-2})$:
 - emitowane przez każde ciało o: $T > 0^\circ\text{C}$,
 - ulega prawu: odbicia, załamania, pochłaniania, polaryzacji itd.
 - nie wymaga ośrodka (medium nośnego);
 - traktujemy zgodnie z teorią kinetyczno-molekularną;
 - proces objętościowy - powierzchniowy ?
 - ciało doskonale czarne (CDC), ciało doskonale białe (CDB) i ciało szare.
- promieniowania nietermiczne: X, gamma, mikrofae, fale radiowe, telewizyjne,

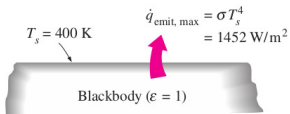
Prawo Stefana-Boltzmana (CDC):

$$\dot{Q}_{emit.max} = \sigma A_s T_s^4, \quad [\text{W}]$$

$$\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

- stała Stefana-Boltzmana,

T_s - temperatura powierzchni, K



Dla ciała szarego:

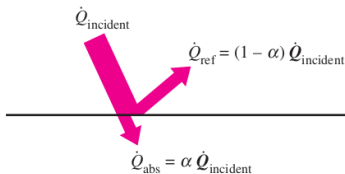
$$\dot{Q}_{emit} = \epsilon \sigma A_s T_s^4, \quad [\text{W}]$$

$0 \leq \epsilon \leq 1$ - emisyjność, dla CDC: $\epsilon = 1$

Emissivities of some materials
at 300 K

Material	Emissivity
Aluminum foil	0.07
Anodized aluminum	0.82
Polished copper	0.03
Polished gold	0.03
Polished silver	0.02
Polished stainless steel	0.17
Black paint	0.98
White paint	0.90
White paper	0.92–0.97
Asphalt pavement	0.85–0.93
Red brick	0.93–0.96
Human skin	0.95
Wood	0.82–0.92
Soil	0.93–0.96
Water	0.96
Vegetation	0.92–0.96

- absorpcyjność (α) - część energii padającej pochłonięta przez ciało
- podobnie jak ε , absorpcyjność: $0 \leq \alpha \leq 1$
 - CDC: $\alpha = 1$, CDB: $\alpha = 0$
 - dla ε , α - zależą od T i λ : dla $T = \text{const}$ i $\lambda = \text{const} \implies \varepsilon = \alpha$;



Szybkość pochłaniania promieniowania:

$$\dot{Q}_{abs} = \alpha \dot{Q}_{inc}$$

Dla promieniowania odbitego:

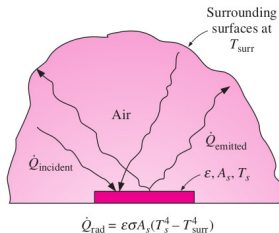
$$\dot{Q}_{ref} = (1 - \alpha) \dot{Q}_{inc}$$

$\dot{Q}_{abs} > \dot{Q}_{ref}$ - akumulacja energii, $\dot{Q}_{abs} < \dot{Q}_{ref}$ - strata energii

Promieniowanie - dwie powierzchnie przedzielone gazem

Ilość ciepła przekazana przez promieniowanie:

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_{surr}^4) \quad [\text{W}]$$



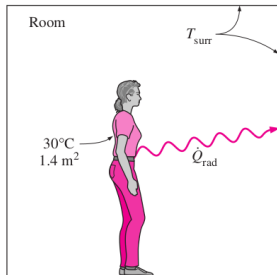
- przewodzenie/konwekcja w gazie
- wypadkowy współczynnik wnikania ciepła (α_{comb}), wówczas:

$$\dot{Q}_{tot} = \alpha_{comb} A_s (T_s - T_{\infty})$$

Promieniowanie:

- znaczące do przewodzenia i konwekcji nat.
- mniej znaczące do konwekcji wymuszonej

Przykład promieniowanie ciepła do otoczenia przez osobę



Dane: $T_z = 10^\circ\text{C}$, $T_l = 25^\circ\text{C}$. Zakładając że: $\varepsilon = 0,95$ oraz osoba:
 $T_s = 30^\circ\text{C}$ i $A_s = 1,4\text{ m}^2$, oblicz szybkość promieniowania ciepła w zimie
i lecie.

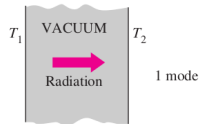
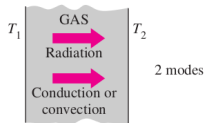
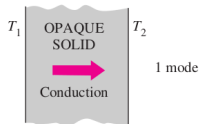
w zimie:

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_z^4) = \dots = 40,9\text{ W}$$

w lecie:

$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon \sigma A_s (T_s^4 - T_l^4) = \dots = 152\text{ W}$$

Jednoczesny przepływ ciepła



Przepływ ciepła w:

- ciele stałym (nieprzeźroczystym)
 - przewodzenie + promieniowanie
 - konwekcja - powierzchnia (np. ogrzewanie kamienia)
- płynie
 - promieniowanie
 - przewodzenie lub (!) konwekcja
 - gazy - brak promieniowania (wyj. O_3 - UV)
 - ciecze - silna absorpcja
- próżni
 - tylko promieniowanie (brak medium nośnego)

Przykład - transfer ciepła do otoczenia przez osobę

Dane: $T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$, Zakładając że: $\varepsilon = 0,95$ i $h = 6\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$ oraz osoba: $T_s = 29^{\circ}\text{C}$ i $A_s = 1,6\text{m}^2$, oblicz całkowitą ilość ciepła przekazywaną od człowieka do otoczenia.

Na sposób promieniowania

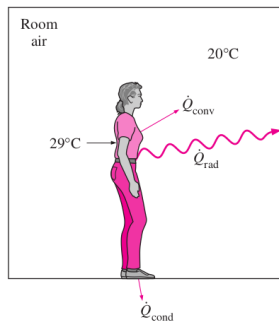
$$\dot{Q}_{konw} = hA_s(T_s - T_{\infty}) = \dots = 86,4\text{ W}$$

Na drodze konwekcji:

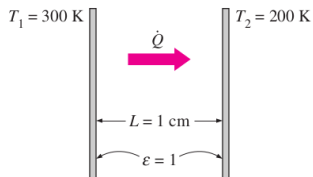
$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma A_s(T_s^4 - T_{\infty}^4) = \dots = 81,7\text{ W}$$

Całkowita ilość ciepła:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{rad} + \dot{Q}_{konw} = \dots = 168,1\text{ W}$$



Przykład - dwie powierzchnie izotermiczne



$$T_1 = 300\text{K}, T_2 = 200\text{K}, L = 1\text{cm}, \varepsilon = 1, \alpha_{izo} = 0,00002\text{W},$$

$$\bar{k}_{pow} = 0,0219\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}, \bar{k}_{ur} = 0,026\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}, \bar{k}_{sup} = 0,00002\text{W/m} \cdot ^\circ\text{C}.$$

Oblicz szybkość przepływu ciepła pomiędzy płytami dla ww. przypadków.

Powietrze - konwekcja + promieniowanie:

$$\dot{Q}_{konw} = \bar{k}_{pow} A \frac{T_1 - T_2}{L} = \dots = 219\text{ W}$$

$$\dot{Q}_{prom} = \varepsilon \sigma A (T_1^4 - T_2^4) = \dots = 368\text{ W}$$

Sumarycznie:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{konw} + \dot{Q}_{prom} = \dots = 587\text{ W}$$

Przykład - dwie powierzchnie izotermiczne

Próżnia: tylko promieniowanie:

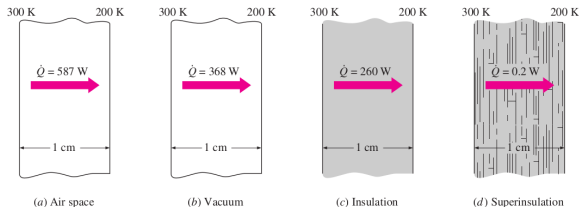
$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{prom} = \dots = 368 \text{ W}$$

Przeźroczysty materiał izolujący - konwekcja:

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{konw} = \dots = 260 \text{ W}$$

Super izolator - w bardzo małym stopniu promieniowanie + konwekcja

$$\dot{Q}_{tot} = \dot{Q}_{konw} = \dots = 0,2 \text{ W}$$

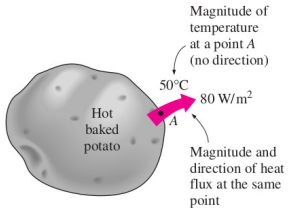


Przykład - podgrzewanie kurczaka w MF

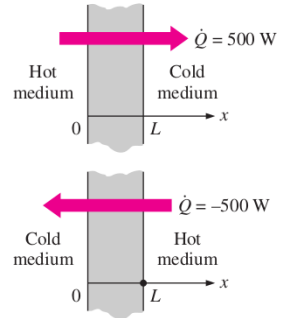


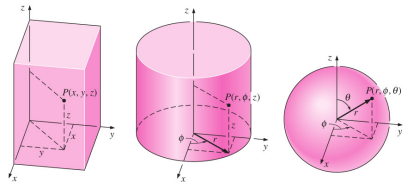
- ① mechanizm przenoszenia ciepła przy podgrzewaniu kurczaka w mikrofalach
- ② efektywność pieczenia w mikrofalach i piekarniku ?

PRZEWODZENIE CIEPŁA - FORMALIZM I POGŁĘBIENIE



- temperatura vs transfer ciepła
 - wektor (kierunek, zwrot, długość)
 - $\dot{Q}$ dodatnie/ujemne względem (OX)
 - punkt (wartość dla konkretnych współrzędnych)
- $\frac{dT}{dx}$ - gradient temp (OX)





❶ prostokątny

- $P(x, y, z)$, $T(x, y, z, t)$ vs. $T(x)$ vs. $T(x, t)$

❷ cylindryczny

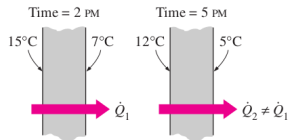
- $P(r, \phi, z)$, $T(r, \phi, z, t)$

❸ sferyczny

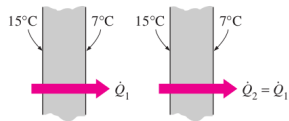
- $P(r, \phi, \theta)$, $T(r, \phi, \theta, t)$

Najlepszy układ współrzędnych - geometria (symetria) układu

Ustalony vs niestabilny transfer ciepła



(a) Transient



(b) Steady-state

❶ niestabilne (transient, unsteady)

- zmiana temperatur medium przewodzącego w czasie - (a)
- zmiana $\dot{Q}$ w czasie
- $T(t)$ dla dowolnego P

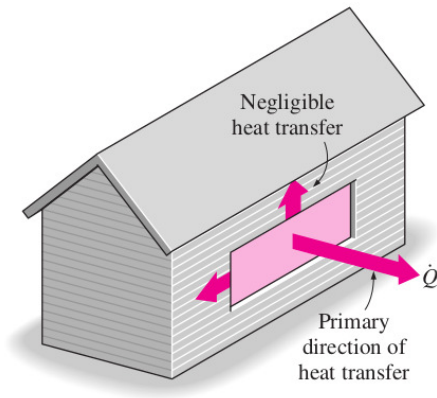
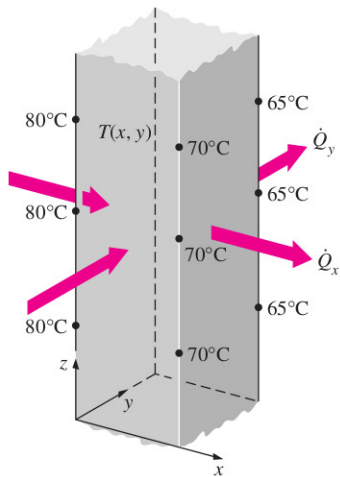
❷ ustalone (steady, steady-state)

- bez zmiany temperatur medium przewodzącego w czasie - (b)
- bez zmiany $\dot{Q}$ w czasie
- bez zmiany T dla dowolnego P

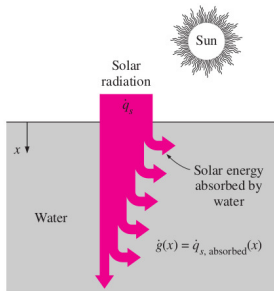
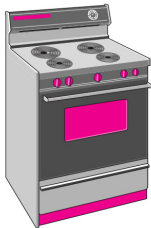
❸ niestabilne dla ustalonych (praktyka inż.)

- strata ciepła przez ściany/sufit/okna/drzwi itd. dla domu

Analiza: 3D $\rightarrow$ 2D i 3D $\rightarrow$ 1D



Generowanie ciepła - wewnętrzne źródło ciepła



Konwersja na energię termiczną:

- energii elektrycznej - ciepło Joule'a $Q = I^2 R t$
- energii chemicznej - egzotermiczne/endotermiczne reakcje
- energii jądrowej - pręty paliwowe

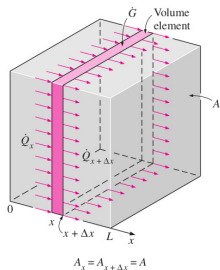
Generowanie ciepła - proces objętościowy:

$$\dot{G} = \int_V \dot{g} dV \quad (1)$$

dla ciała jednorodnego (homogenicznego): $\dot{g} = \text{const.}$

$$\dot{G} = \dot{g} V$$

Równania przewodzenia ciepła - 1D



Bilans energii dla Δx przy założeniu: $\rho, C, A = \text{const.}$:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{G}_{element} = \frac{\Delta E_{element}}{\Delta t} \quad (2)$$

Ale:

$$\Delta E_{element} = E_{t+\Delta t} - E_t = mC(T_{t+\Delta t} - T_t) = \rho CA\Delta x(T_{t+\Delta t} - T_t) \quad (3)$$

$$\dot{G}_{element} = \dot{g}V_{element} = \dot{g}A\Delta x \quad (4)$$

Podstawiając równania: (3) i (4) do (2) otrzymamy:

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+\Delta x} + \dot{g}A\Delta x = \rho CA\Delta x \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (5)$$

ściana, szyba,

metalowa płyta, pręt

paliwowy, drut

oporowy, ściana

kontenera sferycznego,

dzieląc (5) przez $A\Delta x$

$$-\frac{1}{A} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} + \dot{g} = \rho C \frac{T_{t+\Delta t} - T_t}{\Delta t} \quad (6)$$

uwzględniając równanie Fouriera:

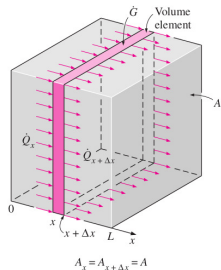
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\dot{Q}_{x+\Delta x} - \dot{Q}_x}{\Delta x} = \frac{\partial \dot{Q}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-kA \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (7)$$

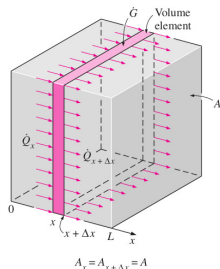
oraz biorąc granice: $\Delta x \rightarrow 0$ i $\Delta t \rightarrow 0$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (8)$$

lub (po podzieleniu przez k i uwzględnieniu $\alpha = k/\rho C$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$





Ustalony przepływ ciepła: $\partial/\partial t = 0$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (10)$$

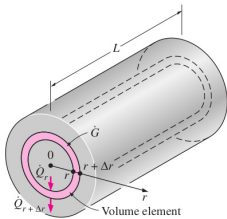
Nieustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\dot{g} = 0$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

Ustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\partial/\partial t = 0$ i $\dot{g} = 0$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (12)$$

Równania przewodzenia ciepła - 1D - (x, t) - cylinder



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

lub (po podzieleniu przez k i uwzględnieniu $\alpha = k/\rho C$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (14)$$

Równania przewodzenia ciepła - 1D - (x, t) - cylinder

Ustalony przepływ ciepła: $\partial/\partial t = 0$

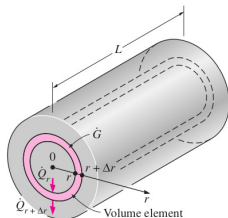
$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (15)$$

Nieustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\dot{g} = 0$

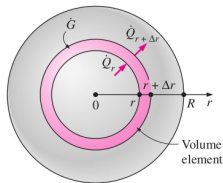
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

Ustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\partial/\partial t = 0$ i $\dot{g} = 0$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (17)$$



Równania przewodzenia ciepła - 1D - (x, t) - sfera



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

lub (po podzieleniu przez k i uwzględnieniu $\alpha = k/\rho C$):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (19)$$

Ustalony przepływ ciepła: $\partial/\partial t = 0$

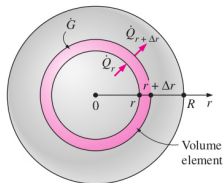
$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (20)$$

Nieustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\dot{g} = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (21)$$

Ustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\partial/\partial t = 0$ i $\dot{g} = 0$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (22)$$



$$\frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^n k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (23)$$

Kolejne przybliżenia:

- $n = 0$ dla ścianki płaskiej, $r = x$
- $n = 1$ dla cylindra
- dla $n = 2$ dla sfery

Możliwe uproszczenia:

- Ustalony przepływ ciepła: $\partial/\partial t = 0$
- Nieustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\dot{q} = 0$
- Ustalony przepływ ciepła i brak generowania ciepła: $\partial/\partial t = 0$ i $\dot{q} = 0$

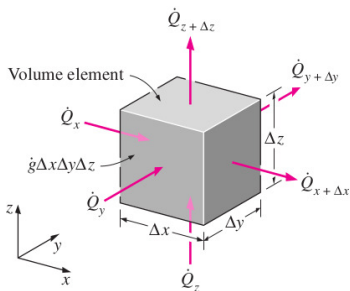
Układ ortogonalny - $P(x, y, z)$

Równanie Fouriera - Biota:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (24)$$

lub (po podzieleniu przez k i uwzględnieniu $\alpha = k/\rho C$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (25)$$



Ogólne równanie przewodzenia ciepła - 3D - układ ortogonalny

Równanie Poissona

ustalony przepływ ciepła ($\partial/\partial t = 0$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (26)$$

Równanie Dyfuzji

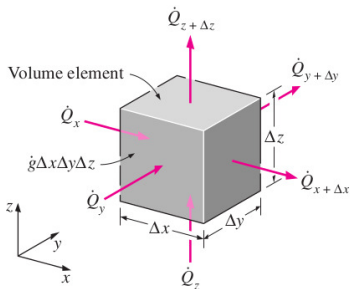
nieustalony przepływ ciepła ($\partial/\partial t \neq 0$) i brak generowania ciepła: ($\dot{g} = 0$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (27)$$

Równanie Laplace'a

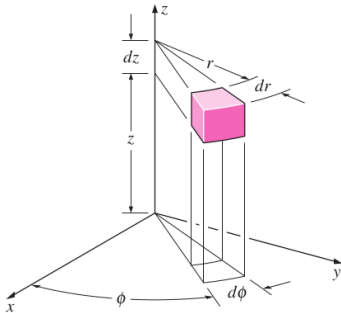
ustalony przepływ ciepła ($\partial/\partial t = 0$) i brak generowania ciepła ($\dot{g} = 0$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (28)$$



Ogólne równanie przewodzenia ciepła - 3D - układ cylindryczny

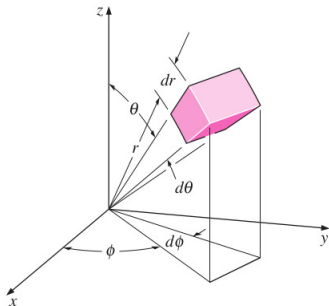
$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi \quad \text{i} \quad z = z$$



$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{kr \partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{g} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (29)$$

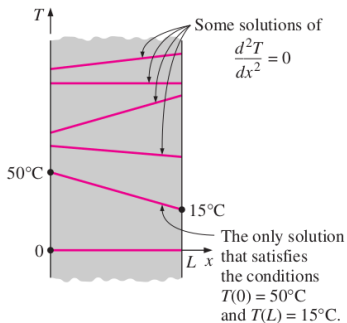
Ogólne równanie przewodzenia ciepła - 3D - układ sferyczny

$$x = r \cos \phi \sin \theta \quad y = r \sin \phi \sin \theta \quad z = r \cos \theta$$



$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (30)$$

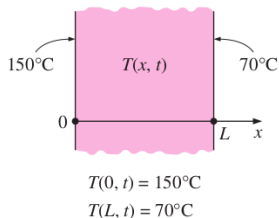
Warunki początkowe i brzegowe dla równań przewodzenia ciepła



- równania przewodzenia ciepła a powierzchnia jego wymiany ($T, \dot{Q}$)
- rozwiązania ogólne i szczególne
- rozwiązanie zależne od warunków (temp. ścianek)
- dwa warunki brzegowe dla jednego kierunku $\dot{Q}$
- warunki początkowe dla $t = 0$

$$T(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

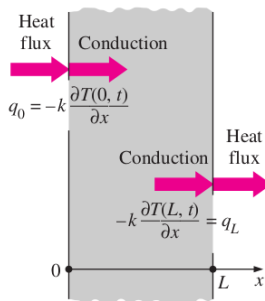
1. Określona temperatura



$$T(0, t) = T_1 \quad (31)$$

$$T(L, t) = T_2$$

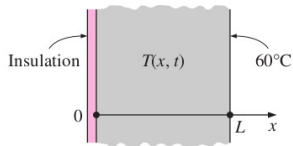
2. Określona szybkość przepływu ciepła



$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{dla } x > 0 \quad (32)$$

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 50 \quad \text{i} \quad -k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = -50 \quad (33)$$

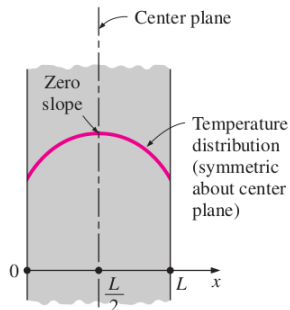
3. Izolowany warunek brzegowy



$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0$$
$$T(L, t) = 60^\circ\text{C}$$

$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

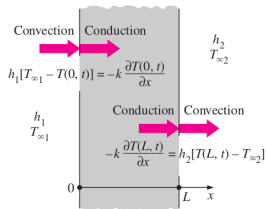
4. Symetria temperaturowa



$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0$$

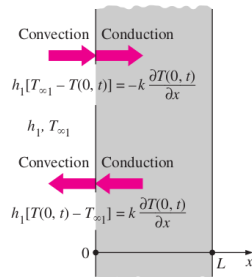
$$\frac{\partial T(L/2, t)}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

Konwekcyjne warunki brzegowe

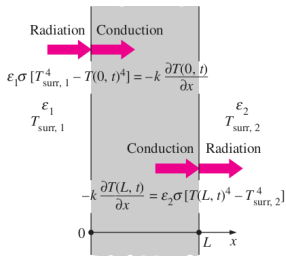


$$-k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = h_1[T_{\infty 1} - T(0, t)] \quad (36)$$

$$-k \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = h_2[T(L, t) - T_{\infty 2}] \quad (37)$$



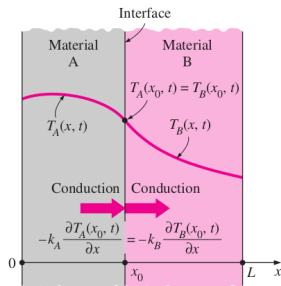
Warunki brzegowe z promieniowaniem



$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = \varepsilon_1 \sigma [T_{surr,1}^4 - T(0,t)^4] \quad (38)$$

$$-k \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = \varepsilon_2 \sigma [T(L,t)^4 - T_{surr,2}^4] \quad (39)$$

Interferencyjny warunek brzegowy



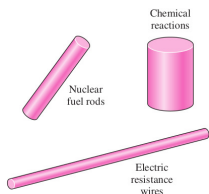
$$T_A(x_0, t) = T_B(x_0, t) \quad (40)$$

$$-k_A \frac{\partial T_A(x_0, t)}{\partial x} = -k_B \frac{\partial T_B(x_0, t)}{\partial x} \quad (41)$$

Wewnętrzne źródło ciepła - wzrost temperatury w medium przewodzącym ciepło

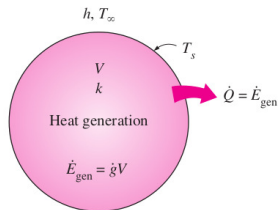
Wytwarzanie ciepła to proces objętościowy, np dla drutu oporowego:

$$\dot{q} = \frac{\dot{E}_{ele.}}{V_{wire}} = \frac{I^2 R_e}{\pi r_0^2 L} \quad (42)$$



- ciepło przepływa $\rightarrow$ rośnie temperatura
- $\dot{Q}_{m \rightarrow s} = \dot{Q}_{s \rightarrow m}$
- najważniejsze parametry dla medium: T_{max} i T_{surf}

Wewnętrzne źródło ciepła w ciele stałym: obliczanie T_{surf} dla $\dot{g} = \text{const.}$



$$\dot{Q} = \dot{G} \quad (43)$$

$$\dot{Q} = \dot{g}V \quad (44)$$

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (45)$$

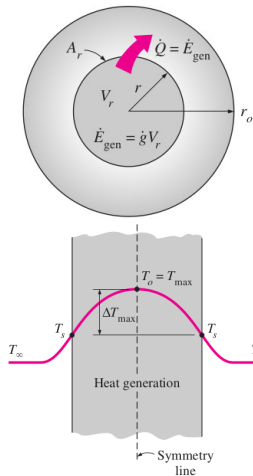
$$\text{Ogólnie: } T_s = T_\infty + \frac{\dot{g}V}{hA_s} \quad (46)$$

$$T_{s, \text{płaskiej}} = T_\infty + \frac{\dot{g}L}{h} \quad \text{dla: } 2L, A_s = 2A_{wall}, V = 2LA_{wall} \quad (47)$$

$$T_{s, \text{cylinder}} = T_\infty + \frac{\dot{g}r_0}{2h} \quad \text{dla: } r_0, A_s = 2\pi r_0, V = \pi r_0^2 L \quad (48)$$

$$T_{s, \text{sfera}} = T_\infty + \frac{\dot{g}r_0}{3h} \quad \text{dla: } r_0, A_s = 4\pi r_0^2, V = 4/3\pi r_0^3 \quad (49)$$

Wewnętrzne źródło ciepła w ciele stałym: obliczanie T_{max} dla $\dot{g} = \text{const.}$



$$-k A_r \frac{dT}{dr} = \dot{g} V_r \quad (50)$$

$$-k(2\pi r L) \frac{dT}{dr} = \dot{g}(\pi r^2 L) \rightarrow dT = -\frac{\dot{g}}{2k} r dr \quad (51)$$

Całkowanie dla warunków: $T(r=0) = T_0$ i $T(r=r_0) = T_s$ daje:

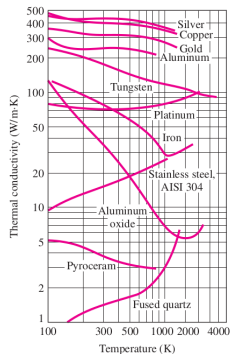
$$\Delta T_{max.cylinder} = T_0 - T_s = \frac{\dot{g} r_o^2}{4k} \quad (52)$$

$$T_{center} = T_0 = T_s + \Delta T_{max} \quad (53)$$

$$\Delta T_{max.płaska} = \frac{\dot{g} L^2}{2k} \quad (54)$$

$$\Delta T_{max.sfera} = \frac{\dot{g} r_o^2}{6k} \quad (55)$$

Zależność $k(T)$



$k(T) \rightarrow k_{ave} = \text{const.}$

dla danego ΔT

$$k_{ave} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (56)$$

$$\dot{Q}_{sci.płaska} = k_{ave} A \frac{T_1 - T_2}{L} = \frac{A}{L} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (57)$$

$$\dot{Q}_{sci.cylindr} = 2\pi k_{ave} L \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} = \frac{2\pi L}{\ln(r_2/r_1)} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (58)$$

$$\dot{Q}_{sfery} = 4\pi k_{ave} r_1 r_2 \frac{T_1 - T_2}{r_2 - r_1} = \frac{4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1} \int_{T_1}^{T_2} k(T) dT \quad (59)$$

Zależność $k(T)$

Zmienność k w zależności od T może być opisana funkcją:

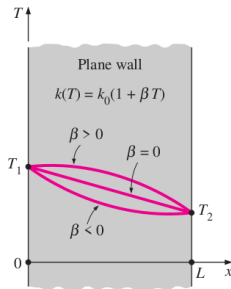
$$k(T) = k_0(1 + \beta T) \quad (60)$$

Obliczając k_{ave} :

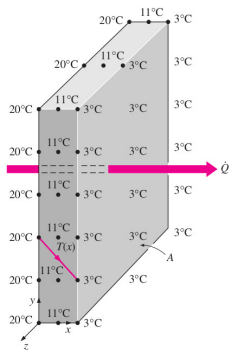
$$k_{ave} = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} k_0(1 + \beta T) dT = k_0 \left(1 + \beta \frac{T_2 + T_1}{2} \right) = k(T_{ave}) \quad (61)$$

$$k_{ave} = k(T_{ave})$$

Średnia przewodność termiczna = przewodność termiczna dla średniej temperatury!



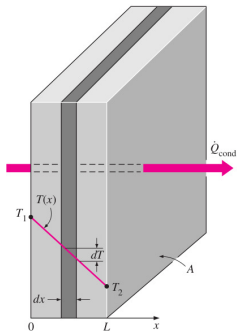
Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny



- powierzchnia izotermiczna
- przepływ ustalony 1D
- bilans energii (proces ustalony)

$$\dot{Q}_{in} - \dot{Q}_{out} = \frac{dE_{wall}}{dt} = 0 \implies \dot{Q}_{cond.wall} = \text{const.} \quad (62)$$

Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny



Ścianka o: L, k, T_1, T_2 , 1-D, stąd: $T(x)$

$$\dot{Q}_{cond.wall} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (63)$$

$\dot{Q}_{cond.wall}, A = \text{const.} \Rightarrow dT/dx = \text{const}$ - temp. zmienia się liniowo!

$$\int_0^L \dot{Q}_{cond.wall} dx = - \int_{T_1}^{T_2} kA dT \quad (64)$$

$$\dot{Q}_{cond.wall} = kA \frac{T_1 - T_2}{L} \quad (65)$$

Równanie (65) można zapisać jako:

$$\dot{Q}_{cond.wall} = \frac{T_1 - T_2}{R_{wall}} \quad (66)$$

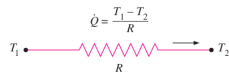
gdzie:

$$R_{wall} = \frac{L}{kA} \quad (67)$$

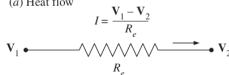
jest oporem przewodzenia ciepła R_{wall} .

Analogia do oporu elektrycznego:

$$I = \frac{V_1 - V_2}{R_e} \quad (68)$$

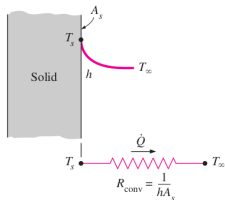


(a) Heat flow



(b) Electric current flow

Ustalane przewodzenie ciepła - opór termiczny

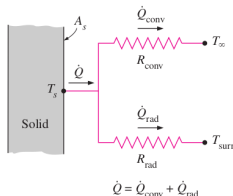


Dla konwekcji:

$$\dot{Q}_{conv} = \frac{T_s - T_{\infty}}{R_{conv}} \quad (69)$$

$$R_{conv} = \frac{1}{hA_s} \quad (70)$$

i promieniowania:

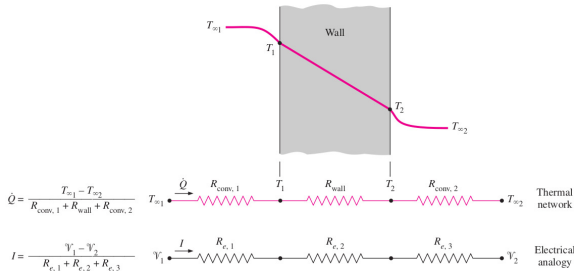


$$\dot{Q}_{rad} = \varepsilon\sigma(T_s^4 - T_{surr}^4) = h_{rad}A_s(T_s - T_{surr}) = \frac{T_s - T_{surr}}{R_{rad}} \quad (71)$$

$$R_{rad} = \frac{1}{h_{rad}A_s} \quad (72)$$

$$h_{rad} = \frac{\dot{Q}_{rad}}{A_s(T_s - T_{surr})} = \varepsilon\sigma(T_s^2 + T_{surr}^2)(T_s + T_{surr}) \quad (73)$$

Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny



$$\dot{Q} = h_1 A (T_{\infty 1} - T_1) = k A \frac{T_1 - T_2}{L} = h_2 A (T_2 - T_{\infty 2})$$

Co można zapisać:

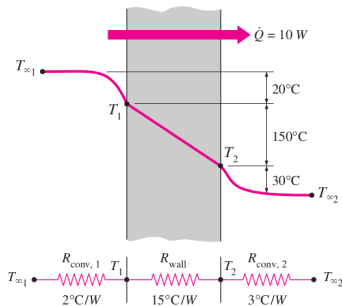
$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \frac{T_{\infty 1} - T_1}{1/h_1 A} = \frac{T_1 - T_2}{L/kA} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{1/h_2 A} \\ &= \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_{conv1}} = \frac{T_1 - T_2}{R_{wall}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_{conv2}} \end{aligned}$$

Ostatecznie:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \quad (74)$$

gdzie: $R_{total} = R_{conv1} + R_{wall} + R_{conv2} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{1}{k A} + \frac{1}{h_2 A}$

Ustalony przewodzenie ciepła - opór termiczny



Przekształcając (74) otrzymujemy:

$$\Delta T = \dot{Q} R \quad (75)$$

- $\Delta T \approx R_i$
- nie trzeba znać T_i aby obliczyć $\dot{Q}$
- znając $\dot{Q}$ można wyznaczyć T_i (warunki ustalone)

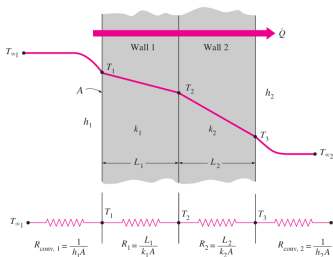
Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny

Dla warunków ustalonych:

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \quad (76)$$

$$R_{total} = R_{conv1} + R_{wall1} + R_{wall2} + R_{conv2} \quad (77)$$

$$= \frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A} + \frac{L_2}{k_2 A} + \frac{1}{h_2 A} \quad (78)$$

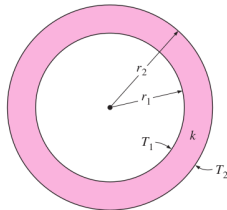
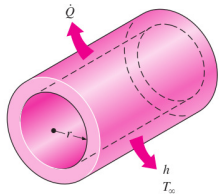


W celu obliczenia temperatury ścianki i : T_i :

$$\dot{Q} = \frac{T_i - T_j}{R_{total,i-j}} \quad (79)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{conv,1} + R_{wall,1}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L_1}{k_1 A}} \quad (80)$$

Ustalane przewodzenie ciepła - opór termiczny



$$\dot{Q}_{cond.cyl} = -kA \frac{dT}{dr} \quad (81)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\dot{Q}_{cond.cyl}}{A} dr = -k \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (82)$$

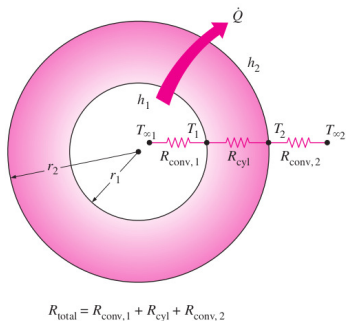
$$\dot{Q}_{cond.cyl} = 2\pi Lk \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)} \quad (83)$$

$$\dot{Q}_{cond.cyl} = \frac{T_1 - T_2}{R_{cyl}} \quad (84)$$

$$R_{cyl} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{T_1 - T_2} \quad (85)$$

$$\begin{aligned} R_{total} &= R_{conv1} + R_{cyl} + R_{conv2} \\ &= \frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} + \frac{1}{2\pi r_2 L h_2} \end{aligned} \quad (86)$$

Ustalane przewodzenie ciepła - opór termiczny



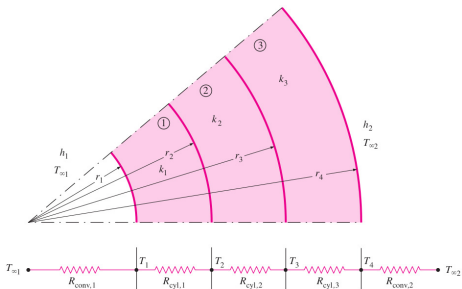
$$\dot{Q}_{cond.sph} = \frac{T_1 - T_2}{R_{sph}} \quad (87)$$

$$R_{sph} = \frac{r_1 - r_2}{4\pi r_1 r_2 k} \quad (88)$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} R_{total} &= R_{conv1} + R_{sph} + R_{conv2} \\ &= \frac{1}{(4\pi r_1^2)h_1} + \frac{r_2 - r_1}{4\pi r_1 r_2 k} + \frac{1}{(4\pi r_2^2)h_2} \end{aligned} \quad (90)$$

Ustalzone przewodzenie ciepła - opór termiczny



$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{total}}$$

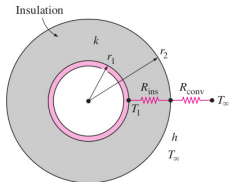
$$R_{total} = R_{con1} + R_{cyl1} + R_{cyl2} + R_{cyl3} + R_{conv2}$$

$$= \frac{1}{h_1 A_1} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1} + \frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{h_2 A_4}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{R_{conv1} + R_{cyl1}} = \frac{T_{\infty 1} - T_2}{\frac{1}{h_1(2\pi r_1 L)} + \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k_1}}$$

$$\dot{Q} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2 + R_3 + R_{conv2}} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{\frac{\ln(r_3/r_2)}{2\pi L k_2} + \frac{\ln(r_4/r_3)}{2\pi L k_3} + \frac{1}{h_2(2\pi r_4 L)}}$$

Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny - średnica krytyczna izolacji



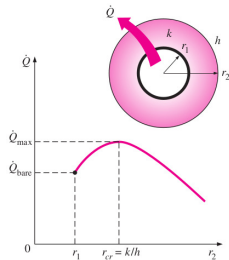
- im $\uparrow$ izolacji tym $\downarrow \dot{Q}$ jeżeli $A = \text{const.}$
- dla cylindra lub sfery:
 - im $\uparrow$ izolacji tym $\uparrow R_{izol}$
 - im $\uparrow$ izolacji tym $\downarrow R_{konw}$ bo $\uparrow A_{out}$
 - szybkość przepływu ciepła:

$$\dot{Q} = \frac{T_1 - T_{\infty}}{R_{ins} + R_{conv}} = \frac{T_1 - T_{\infty}}{\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk} + \frac{1}{h(2\pi r_2 L)}} \quad (91)$$

Ustalone przewodzenie ciepła - opór termiczny - średnica krytyczna izolacji

- maksimum na krzywej $\dot{Q} = f(r_2)$ z warunku: $d\dot{Q}/dr = 0$
- różniczkując i przyrównując $r_2 \rightarrow r_{cr}$ otrzymujemy:

$$r_{cr.cyl} = \frac{k}{h} \quad \text{dla cylindra} \quad (92)$$



- wnioski
 - $\dot{Q} \uparrow$ dla $r_2 < r_{cr}$
 - $\dot{Q}_{max}$ dla $r_2 = r_{cr}$
 - $\dot{Q} \downarrow$ dla $r_2 > r_{cr}$
- czy zawsze należy porównywać r_2 i r_{cr} ??

$$r_{cr.max} = \frac{k_{max.is}}{h_{min}} \approx \frac{0,05 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}}{5 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = 0,01 \text{ [m]} \quad (93)$$

$$r_{cr.sph} = \frac{2k}{h} \quad (94)$$