

# Część 1. Przepływ płynów

dr inż. Piotr Niemiec

Katedra Chemiii

Wydział Matematyczno-Przyrodniczy

Akademia Tarnowska

## Płyny

Substancje mające ciekłość, tzn. niezdolność do zachowania swojego kształtu i całkowicie wypełniające zajmowaną przez nie objętość.

## Płyn doskonały (idealny)

Absolutnie nieściśliwy. Nie występuje w nim tarcie wewnętrzne między cząsteczkami (lepkość).

## Podział płynów rzeczywistych:

- właściwe - ciecze
- sprężyste - gazy

## Proces technologiczny

Składa się z wielu operacji jednostkowych oraz procesów jednostkowych

## Operacje jednostkowe

Czynności powodujące zmiany właściwości fizycznych substancji uczestniczących w tym procesie. Nie zachodzą reakcje chemiczne.

- mechaniczne: mieszanie, filtrowanie, odpylanie;
- cieplne: przewodzenie, konwekcja, promieniowanie, wrzenie, skraplanie;
- dyfuzyjne: destylacja, rektyfikacja, absorpcja, adsorpcja, ekstrakcja, krystalizacja, suszenie.

## Procesy jednostkowe jednostkowe

Czynności, w których przebiega reakcja chemiczna lub biochemiczna substancji uczestniczących w tym procesie

## Gęstość

Masa płynu zawarta w jednostce jej objętości:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1)$$

gdzie:  $m$  - masa płynu [kg],  $V$  - objętość płynu [ $\text{m}^3$ ]

## Ciężar właściwy

Ciężar jednostki objętości płynu

$$\gamma = \frac{Q}{V} \quad (2)$$

gdzie:  $Q$  - ciężar płynu [N]

Ciężar właściwy jest związany z gęstością następującą zależnością:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (3)$$

gdzie:  $g$  - przyspieszenie ziemskie [ $\text{m}^2/\text{s}$ ]

Gęstość gazów zmienia się znacznie w zależności od temperatury i ciśnienia . Zależność między temperaturą, ciśnieniem i objętością gazów określa się **równaniem stanu**:

$$pV = \frac{mRT}{M} \quad (4)$$

gdzie:  $p$  - ciśnienie [ $\text{Pa} = \text{N/m}^2$ ],  $V$  - objętość gazu [ $\text{m}^3$ ],  $m$  - masa gazu [ $\text{kg}$ ],  $R$  - uniwersalna stała gazowa [ $\text{J/kmol}\cdot\text{K}$ ],  $T$  - temperatura [ $\text{K}$ ],  $M$  - masa cząsteczkowa gazu [ $\text{kg/kmol}$ ].

#### Warunki normalne:

- temp.  $0^\circ\text{C}, 273,15 \text{ K}$ ,
- ciśnienie  $101\,325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$ ,
- objętość gazów:  $V_0 = 22400 \text{ cm}^3 = 22,4 \text{ dm}^3 = 0,0224 \text{ m}^3$

Gęstość mieszaniny gazów:

$$\rho = \sum_{i=1}^n x_i \rho_i = \frac{M_m \cdot T_0 \cdot p}{22,4 \cdot T \cdot p_0} \quad (5)$$

gdzie:  $M_m$  - masa molowa mieszaniny gazów [kg/kmol],  $x_i$  - ułamek molowy i-tego składnika gazu.

Dla mieszanin cieczy niedysocjujących i nieasocjujących gęstość oblicza się z równania:

$$\rho_m = \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{\bar{x}_i}{\rho_i} \right) \right]^{-1} \quad (6)$$

gdzie:  $\bar{x}_i$  - ułamek masowy i-tego składnika mieszaniny gazowej.

## Lepkość

Podczas przepływu płynu rzeczywistego powstają w nim siły tarcia wewnętrznego stawiające opór przepływowi.

Ta siła  $T$  odniesiona do jednostki powierzchni  $F$  nazywa się naprężeniem stycznym:

$$\tau = \frac{T}{F} \quad (7)$$

przy czym, zgodnie z prawem Newtona:

$$\tau = \mu \frac{\Delta w}{\Delta n} \quad (8)$$

Współczynnik proporcjonalności  $\mu$  zależy od właściwości fizycznych płynu i nazywa się lepkością lub współczynnikiem lepkości dynamicznej.

Wymiar lepkości dynamicznej w jednostkach SI jest następujący:

$$[\mu] = \left[ \frac{T}{F \cdot \frac{\Delta w}{\Delta n}} \right] = \left[ \frac{N}{m^2 \cdot \frac{m/s}{m}} \right] = \left[ \frac{N \cdot s}{m^2} \right] = \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]$$

### Lepkość kinematyczna

Stosunek lepkości  $\mu$  do gęstości  $\rho$  płynu nazywa się współczynnikiem lepkości kinematycznej lub po prostu lepkością kinematyczną:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (9)$$

Wymiar lepkości kinematycznej w układzie jednostek SI:

$$[\nu] = \left[ \frac{N \cdot s/m^2}{kg/m^3} \right] = \left[ \frac{ks \cdot m/s^2 \cdot s/m^2}{kg/m^3} \right] = \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

## Lepkość jako funkcja temperatury i ciśnienia

- Lepkość cieczy ze wzrostem temperatury zmniejsza się, lepkość gazów wzrasta.
- Zmiana lepkości w zależności od ciśnienia jest nieznaczna i zwykle nie uwzględnia się jej (wyłączając obszar bardzo wysokich ciśnień).

Dla różnych temperatur lepkość dynamiczną oblicza się z równania Sutherlanda:

$$\eta = \eta_0 \frac{(T_0 + S)}{(T + S)} \cdot \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (10)$$

$\eta_0$  - lepkość gazu w warunkach normalnych [Ns/m<sup>2</sup>],  $S$  - stałą Sutherlanda [K],  $T$  - temp. [K].

Stałą Sutherlanda można obliczyć z przybliżonego wyrażenia:

$$S = 1,47 \cdot T_{wrz}.$$

gdzie:  $T_{wrz}$  - temperatura wrzenia gazu pod ciśnieniem atmosferycznym [K].

Dynamiczny współczynnik lepkości gazów może być obliczony z równania przybliżonego:

$$\frac{M_m}{\eta_m} = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{\eta_i} \quad (11)$$

Dla mieszanin gazowych pod niskim ciśnieniem:

$$\eta_m = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \eta_i \sqrt{M_i T_{kr,i}}}{\sum_{i=1}^n x_i \sqrt{M_i T_{kr,i}}} \quad (12)$$

gdzie:  $T_{kr,i}$  - temperatura krytyczna i-tego składnika gazowego [K]

## Lepkość cieczy

- jest z reguły kilkadziesiąt razy większa od lepkości gazu
- zależność lepkości cieczy od temperatury można wyliczyć z empirycznego równania Girifalco:

$$\log(\eta) = A + \frac{B}{T} + \frac{C}{T^2} \quad (13)$$

gdzie:  $T$  - temperatura cieczy [K],  $A, B, C$  - parametry stałe charakterystyczne dla danej cieczy

- w różnych temperaturach można wyznaczyć z wyrażenia Thorpera i Rodegera:

$$\eta = \frac{c}{1 + at + bt^2} \quad (14)$$

gdzie:  $t$  - temperatura wyrażona w stopniach Celsjusza,  $a, b, c$  - współczynniki charakterystyczne dla danej cieczy

Lepkość mieszanin cieczy nieasocjujących:

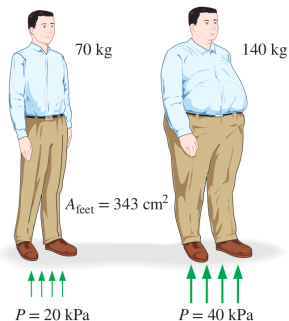
$$\log(\eta_m) = \sum_{i=1}^n [x_i \log(\eta_i)] \quad (15)$$

Co prowadzi do:

$$\eta_m = \prod_{i=1}^n (\eta_i)^{x_i} \quad (16)$$

## Ciśnienie - definicja

Siła wywierana przez płyn na jednostkę powierzchni i do niej prostopadła.



$$P = \sigma_n = \frac{W}{A_{\text{feet}}} = \frac{(70 \times 9.81/1000) \text{ kN}}{0.0343 \text{ m}^2} = 20 \text{ kPa}$$

Jednostki:

- $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} = 0,1 \text{ MPa} = 100 \text{ kPa}$
- $1 \text{ atm} = 101,325 \text{ kPa} = 1,01325 \text{ bar}$
- $1 \text{ kgf/cm}^2 = 9,807 \text{ N/cm}^2 = 0,9807 \text{ bar} = 0,9679 \text{ atm}$
- $\text{lbf/in}^2$  lub  $\text{psi}$ ,  $1 \text{ atm} = 14,696 \text{ psi}$

Dla ciała stałego - napężenie normalne  $\neq$  ciśnienie

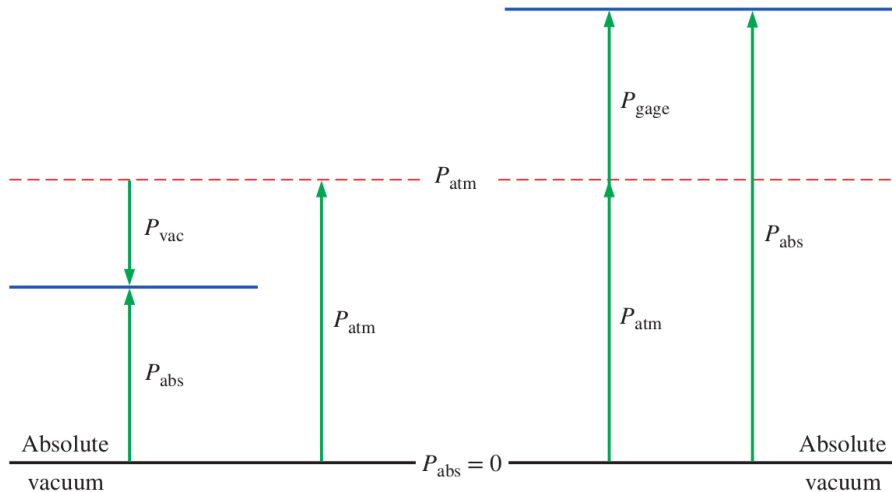
- ❶ Ciśnienie w danym punkcie - ciśnienie absolutne, mierzone względem zera (próżni, braku ciśnienia)
  - większość urządzeń  $p_{atm} = 0$
- ❷ Ciśnienie względne - różnica pomiędzy ciśnieniem absolutnym a zerowym
- ❸ nadciśnienie - powyżej atmosferycznego
- ❹ podciśnienie - poniżej atmosferycznego

$$P_{gauge} = P_{abs} - P_{atm} \quad (17)$$

$$P_{vac} = P_{atm} - P_{abs} \quad (18)$$

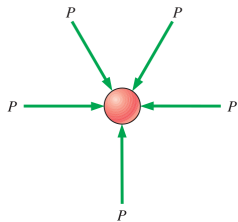
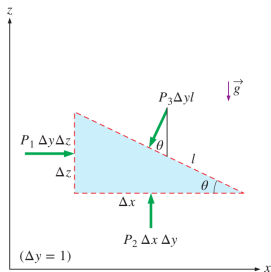
$$P_{abs} \rightarrow P$$

# Ciśnienie i statyka płynów - ciśnienie absolutne, względne i zerowe



# Ciśnienie i statyka płynów - ciśnienie w punkcie

Klinowy element płynu:



$$\sum F_x = 0 \quad P_1 \Delta y \Delta z - P_3 \Delta y l \sin \theta = 0 \quad (19)$$

$$\sum F_z = 0 \quad P_2 \Delta y \Delta x - P_3 \Delta y l \cos \theta - \frac{1}{2} \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0 \quad (20)$$

Ciężar klinowego elementu płynnego:  $W = mg = g\rho \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z/2$

Klin ma kształt trójkąta, stąd:  $\Delta x = l \cos \theta$  i  $\Delta z = l \sin \theta$

Dzieląc (19) przez  $\Delta y \Delta z$  i (20) przez  $\Delta y \Delta x$  otrzymamy:

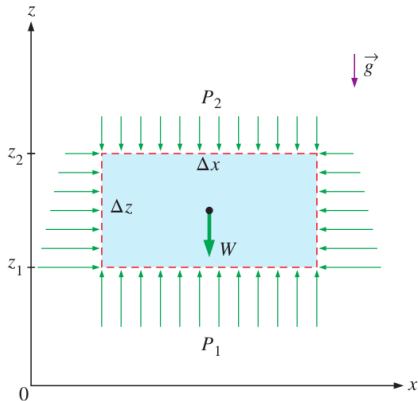
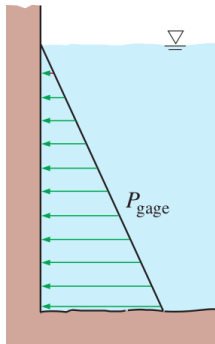
$$P_1 - P_3 = 0 \quad (21)$$

$$P_2 - P_3 - \frac{1}{2} \rho g \Delta z = 0 \quad (22)$$

dla  $\Delta z \rightarrow 0$

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

# Ciśnienie i statyka płynów - zmiana ciśnienia z głębokością



# Ciśnienie i statyka płynów - zmiana ciśnienia z głębokością

Bilans sił, w kierunku osi  $z$ :  $\sum F_z = 0$  wynosi:

$$P_1 \Delta x \Delta y - P_2 \Delta x \Delta y - \rho g \Delta x \Delta y \Delta z = 0$$

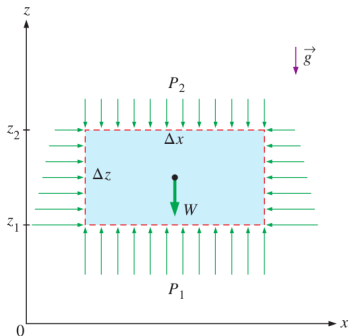
$$W = mg = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z \quad \text{gdzie:} \quad \Delta z = z_2 - z_1$$

Dzieląc przez  $\Delta x \Delta y$  otrzymujemy:

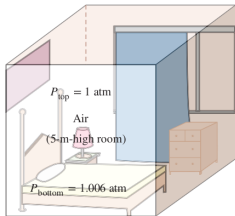
$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\rho g \Delta z = -\gamma_s \Delta z \quad (23)$$

gdzie:  $\gamma_s$  to ciężar właściwy cieczy ( $\gamma_s = \rho g$ ),  $\rho$  jej gęstość (z zał. stała)

Ciśnienie w spoczywającym płynie rośnie liniowo z głębokością!



# Ciśnienie i statyka płynów - zmiana ciśnienia z głębokością



Równanie:

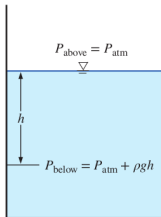
$$\Delta P = P_2 - P_1 = -\rho g \Delta z = -\gamma_s \Delta z \quad (24)$$

Najłatwiej przedstawić w postaci:

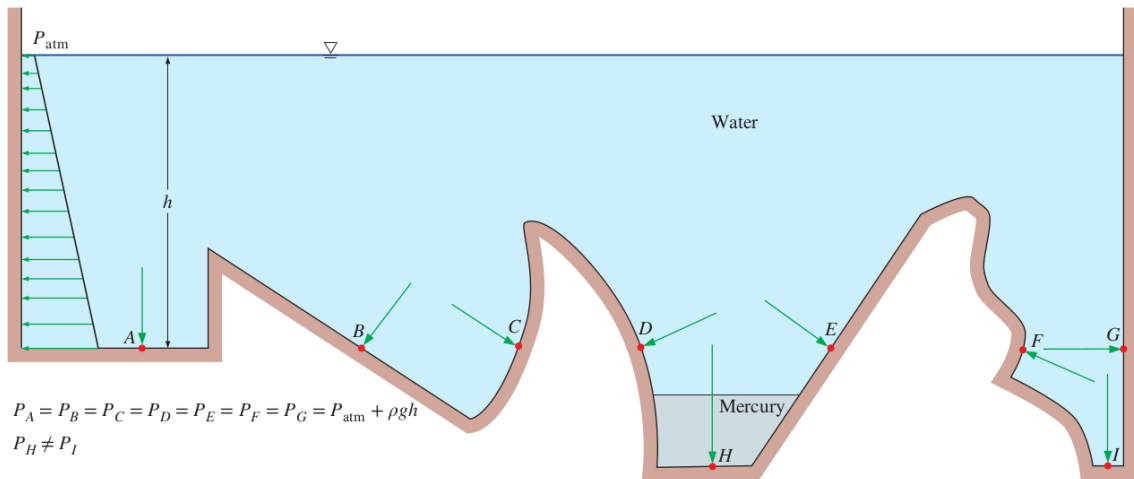
$$P_{below} = P_{above} + \rho g |\Delta z| = P_{above} + \gamma_s |\Delta z| \quad (25)$$

określenie *below* - niżej w płynie, *above* - wyżej w płynie

- $\rho$  dla gazów bardzo małe ( $\rho_g \ll \rho_c$ )
- dla gazów człon  $\gamma_s |\Delta z|$  zaniedbywalny
- zaniedbywalna zmiana  $\rho_g$  wraz z wysokością

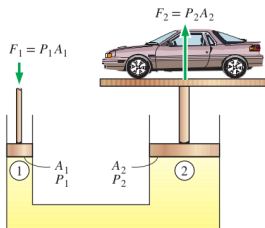


# Ciśnienie i statyka płynów - zmiana ciśnienia z głębokością



Trzy sformułowania:

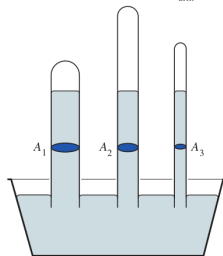
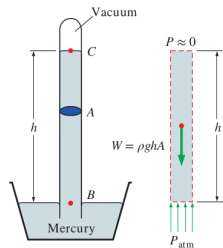
- ❶ Ciśnienie wywierane na zamknięty płyn jest przekazywane niezmiennie na każdą część płynu oraz na ścianki naczynia
- ❷ Ciśnienie zewnętrzne wywierane na ciecz lub gaz znajdujące się w naczyniu zamkniętym rozchodzi się jednakowo we wszystkich kierunkach.
- ❸ Ciśnienie w płynie na tym samym poziomie jest jednakowe.



$$P_1 = P_2 \rightarrow \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1} \quad (26)$$

Np. dla  $A_2/A_1 = 100$  możemy podnieść 1000 kg samochód (ciężar 10 000 N), przy użyciu 100 N

# Ciśnienie i statyka płynów - pomiar ciśnienia - barometr



- ciśnienie atmosferyczne - barometr (ciśnienie barometryczne)
- ciśnienie w punkcie **B** - atmosferyczne
- ciśnienie w punkcie **C** - ok. 0 atm (pary Hg)

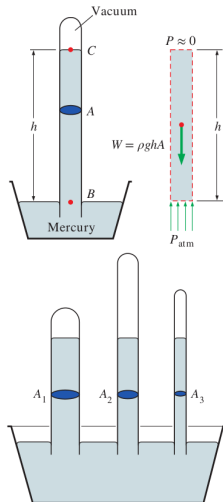
$$P_{atm} = \rho_{Hg}gh \quad (27)$$

gdzie:  $\rho_{Hg}$  - gęstość rtęci,  $h$  - wysokość słupa rtęci ponad poziom

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} \text{ i } 1 \text{ torr} = 133,3 \text{ Pa}$$

- wysokość i przekrój poprzeczny rurki - nie wpływa na " $h_{Hg}$ "

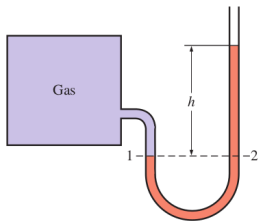
# Ciśnienie i statyka płynów - pomiar ciśnienia - barometr



Ciśnienie atmosferyczne w miarę wzrostu wysokości:

- 101,325 kPa - poziom morza (np. Tarnów ok 100 kPa)
- 89,88 kPa - 1000 m (np. Denver (Colorado) - 83,4 kPa)
- 79,50 kPa - 2000 m
- 54,05 kPa - 5000 m
- 26,5 kPa - 10 000 m
- 5,53 kPa - 20 000 m

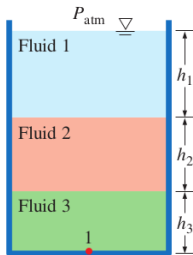
Ciśnienie to siła parcia słupa powietrza na jednostkę powierzchni.



- do pomiaru małych ciśnień
- U-rurka wypełniona: rtęcią, wodą, alkoholem lub olejem
- w równaniu: (24)  $\Delta P / \rho g$  - płyn jako różnica ciśnień
- ciśnienie wewnątrz zbiornika i punkcie 1 ma tę samą wartość
- w myśl prawa Pascala:  $P_1 = P_2$ , a dalej:

$$P_2 = P_{atm} + \rho g h \quad (28)$$

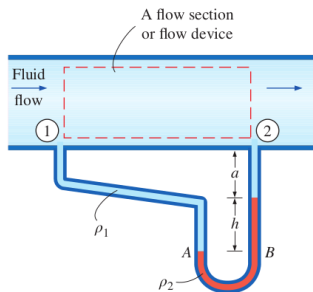
gdzie:  $\rho$  gęstość cieczy manometrycznej



Dla zbiornika wypełnionego płynami o różnej gęstości:

$$P_1 = P_{atm} + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3 \quad (29)$$

gdzie:  $\rho_i$  gęstość kolejnej cieczy manometrycznej



- pomiar spadku ciśnienia w przewodach (np. wymiennik ciepła)
- dwa odnóża U-rurki w dwóch miejscach przewodu
- $\rho_1$  - gęstość płynącego płynu,  $\rho_2$  - gęstość cieczy manometrycznej
- $h$  - różnica wysokości płynącego płynu i cieczy manometrycznej

$$P_1 + \rho_1 g(a + h) - \rho_2 gh - \rho_1 ga = P_2 \quad (30)$$

upraszczając:

$$P_1 - P_2 = (\rho_2 - \rho_1)gh \quad (31)$$

jeżeli przepływającym płynem jest gaz:  $\rho_1 \ll \rho_2$  wówczas:

$$P_1 - P_2 \approx \rho_2 gh \quad (32)$$

Różnica ciśnień wynosi:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho_m g(h_1 + h_2) = \rho_m g h \quad (33)$$

Uwzględniając:

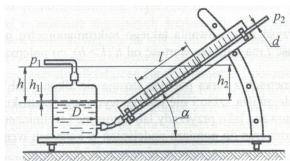
$$\frac{\pi D^2}{4} h_1 = \frac{\pi d^2}{4} l \quad h_2 = l \sin \alpha \quad \text{mamy:} \quad \Delta p = \rho_m g l \left[ \left( \frac{d}{D} \right)^2 + \sin \alpha \right] \quad (34)$$

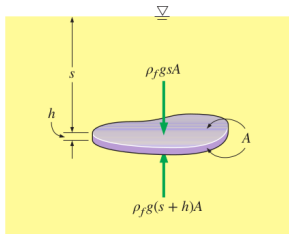
Oznaczając przez  $k$  przełożenie manometru:

$$k = \frac{1}{\left( \frac{d}{D} \right)^2 + \sin \alpha} \quad \text{dochodzimy do:} \quad \Delta p = \rho_m g \frac{l}{k} \quad (35)$$

stąd:

$$h = \frac{l}{k} \quad (36)$$





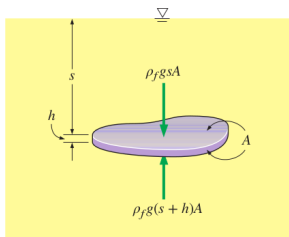
- na ciała/części ciała zanurzone w płynie działa siła wyporu -  $F_B$
- jest ona wynikiem wzrostu ciśnienia z głębokością
- siła z góry:  $F_{\text{top}} = \rho_f g s A$ ,  $s$  - odległość lustra o powierzchnia  $A$
- siła z dołu:  $F_{\text{bottom}} = \rho_f g (s + h) A$ ,  $h$  - wysokość ciała
- z różnicy sił:

$$F_B = F_{\text{bottom}} - F_{\text{top}} = \rho_f g (s + h) A - \rho_f g s A = \rho_f g h A = \rho_f g V$$

- co ostatecznie daje:

$$F_B = \rho_f g V \quad (37)$$

gdzie:  $V$  - objętość zanurzonego ciała



- Siła bezwładności przy założeniu  $\rho_f = const$ :

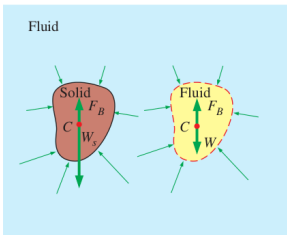
$$F_B = \rho_f g V \quad (38)$$

- wyrażenie  $\rho_f g V$  to ciężar wypartej cieczy ( $V_c$ ) przez ciało o objętości  $V$
- niezależna od  $s$  - głębokości zanurzenia
- niezależna od  $\rho$  - gęstości ciała
- niezależna od kształtu ciała
- działa na zanurzoną część ciała

# Pływanie ciał i równowaga - Prawo Archimedesesa

Ciało stałe o identycznym kształcie jak płyn na tym samym poziomie

- siły bezwładności działające na oba ciała są identyczne ( $s_1 = s_2$ )
- jeżeli ciało *płynne* nie tonie (równowaga sił w kierunku osi  $Y$ ), to  $F_B = W$
- objętości obu ciał są identyczne,

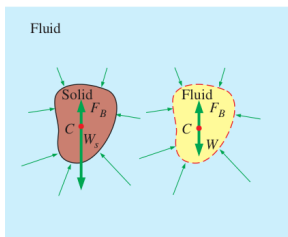


## Prawo Archimedesesa

Siła bezwładności działająca na, zanurzone w płynie, ciało jednorodne jest:

- równa co do wartości ciężarowi wypartego przez to ciało płynu
- przyłożona do jego środka ciężkości  $C$

Dla ciała pływającego



- $W_s = F_B = W$
- $F_B \rightarrow W$  dla objętości cieczy  $V_{total}$  równej  $V_{sub}$

$$F_B = W \rightarrow \rho_f g V_{sub} = \rho_{avg} g V_{total} \rightarrow \frac{V_{sub}}{V_{total}} = \frac{\rho_{avg}}{\rho_f} \quad (39)$$

- ułamek objętości zanurzonego ciała jest równy stosunkowi gęstości ciała i płynu
- w zależności od  $\frac{\rho_{avg}}{\rho_f}$  ciało: 1) wypływa, 2) jest zawieszone, 3) tonie

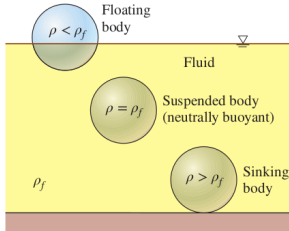
# Pływanie ciał i równowaga - Prawo Archimedesesa

W zależności od stosunku  $\rho/\rho_f$  wyróżniamy:

- wynurzenie ciała na powierzchnię cieczy  $\rho < \rho_f$
- pływania ciała na dowolnej głębokości  $\rho = \rho_f$
- tonięcie ciała  $\rho > \rho_f$
- objętość zanurzona:

$$W = F_B = \rho_f g V_{sub} \rightarrow V_{sub} = \frac{W}{\rho_f g}$$

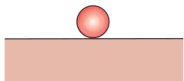
- im  $\rho_f$  większa, tym  $V_{sub}$  mniejsza
- $F_B \propto \rho_f \implies F_B$  może być pomijana dla gazów (z wyjątkami)



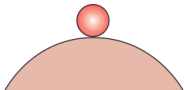
# Pływanie ciał i równowaga - warunki równowagi



(a) Stable



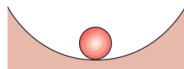
(b) Neutrally stable



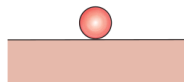
(c) Unstable

Równowaga:

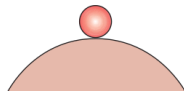
- trwała (stabilna) - niewielkie zaburzenie generuje działanie sił przywracających ciało do równowagi
- obojętna - niewielkie zaburzenie nie zmienia położenia ciała
- nietrwała (chwiejna) - niewielkie zaburzenie wytrąca ciało z równowagi



(a) Stable



(b) Neutrally stable

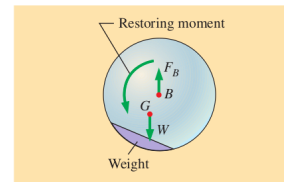
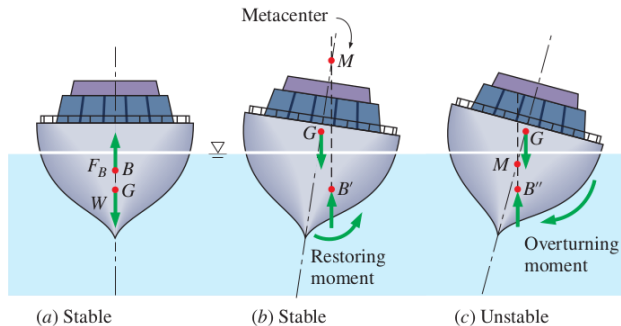
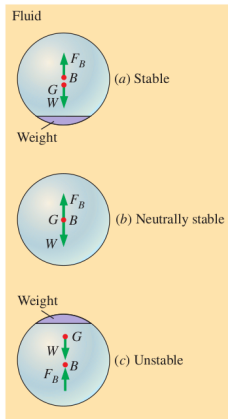


(c) Unstable

Równowaga:

- trwała (stabilna) - tany (punkty) wokół niego są stanami (punktami) o wyższej energii potencjalnej,
- obojętna - wszystkie stany (punkty) wokół ciała mają taką samą energię potencjalną, a siły działające na to ciało równoważą się
- nietrwała (chwiejna) - wszystkie stany (punkty) wokół niego mają niższą energię potencjalną,

# Pływanie ciał i równowaga - warunki równowagi



G - grawicentrum, B - geocentrum powinny być na jednym kierunku

## Bilans masowy procesu

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = \frac{dm_{CV}}{dt} \quad (40)$$

W mechanice płynów - równanie ciągłości

## Bilans energetyczny procesu

$$\dot{E}_{in} - \dot{E}_{out} = \frac{dE_{CV}}{dt} \quad (41)$$

W mechanice płynów - energia mechaniczna

# Strumienie masowe i objętościowe przepływającego płynu

Masowe natężenie przepływu dane jest równaniem:

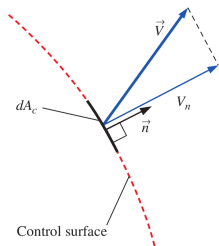
$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA_c \quad [\text{kg/s}] \quad (42)$$

gdzie:

- $\rho$  - gęstość przepływającego płynu,  $[\text{kg/m}^3]$
- $dA_c$  - element powierzchni,  $[\text{m}^2]$
- $V_n$  składowa (normalna) prędkości,  $[\text{m/s}]$

Całkowity strumień przepływającej masy:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n dA_c \quad (43)$$



## Uzupełnienie: Różniczka zupełna i niezupełna

- $\delta$  - różniczka niezupełna: dla wielkości np. praca, ciepło, strumień masy - zależnych od "drogi"
- $d$  - różniczka zupełna: dla wielkości nie zależnych od "drogi" - punktowe

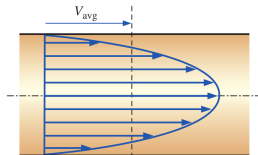
Np. dla przepływu płynu przez pierścień o średnicach wewnętrznej i zewnętrznej:  $r_1$  i  $r_2$ :

$$\int_1^2 dA_c = A_c(2) - A_c(1) = \pi(r_2^2 - r_1^2) \quad \text{ale} \quad \int_1^2 \delta \dot{m} = \dot{m}_{total} \quad \text{nie} \quad \dot{m}_2 - \dot{m}_1$$

- wartość  $dA_c$  jest stała (dla konkretnych  $r_1$  i  $r_2$ )- różniczka zupełna
- wartość  $\dot{m}$  nie jest stała - różniczka niezupełna

Całkowity strumień przepływającej masy:

$$\dot{m} = \int_{A_c} \delta \dot{m} = \int_{A_c} \rho V_n dA_c \quad (44)$$



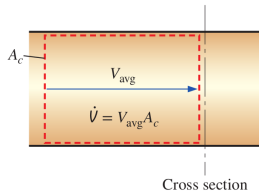
- $\rho$  - stała,  $V_n$  - zmienna, np. przy ścianie i w osi przewodu;  $V_n \rightarrow V_{avg}$

$$V_{avg} = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} V_n dA_c \quad (45)$$

Równanie (44) przyjmie postać:

$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c \quad (46)$$

# Strumienie masowe i objętościowe przepływającego płynu



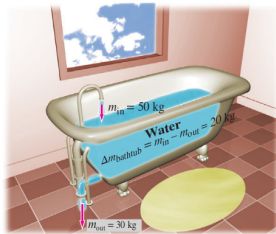
Strumień objętościowy:

$$\dot{V} = \int_{A_c} V_n dA_c = V_{avg} A_c = V A_c \quad [\text{m}^3/\text{s}] \quad \text{gdzie: } V_{avg} \rightarrow V \quad (47)$$

Strumień masy i objętościowy powiązane są zależnością:

$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c = \rho \dot{V} = \frac{\dot{V}}{v} \quad \text{gdzie: } v - \text{objętość właściwa} \quad (48)$$

# Zasada zachowania masy - formalizm i pogłębienie



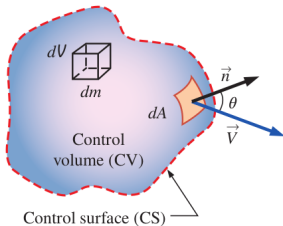
Równania bilansu masy:

$$m_{in} - m_{out} = \Delta m_{CV} \quad [\text{kg}] \quad (49)$$

Alternatywnie, używając strumieni masowych:

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = dm_{CV}/dt \quad [\text{kg/s}] \quad (50)$$

Dla dowolnego kształtu:



$$\text{całkowita masa w CV : } m_{CV} = \int_{CV} \rho dV \quad (51)$$

$$\text{szybkość zmiany masy w CV: } \frac{dm_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV \quad (52)$$

# Zasada zachowania masy - formalizm i pogłębienie

Równania bilansu masy:

$$m_{in} - m_{out} = \Delta m_{CV} \quad [\text{kg}] \quad (53)$$

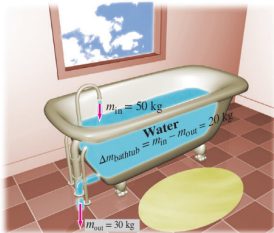
Alternatywnie, używając strumieni masowych:

$$\dot{m}_{in} - \dot{m}_{out} = dm_{CV}/dt \quad [\text{kg/s}] \quad (54)$$

Dla dowolnego kształtu:

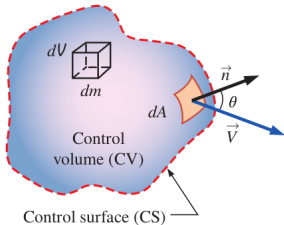
$$\text{całkowita masa w CV : } m_{CV} = \int_{CV} \rho dV \quad (55)$$

$$\text{szybkość zmiany masy w CV: } \frac{dm_{CV}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV \quad (56)$$



Oznaczenia:

- $\vec{n}$  - jednostkowy wektor powierzchniowy dla elementu powierzchni  $dA$
- $\vec{V}$  - wektor prędkości przepływającego płynu
- $\theta$  - kąt pomiędzy  $\vec{n}$  i  $\vec{V}$  (pod jakim płynie płyn względem pionu)
- $\theta = 0$  - maksymalny odpływ: ( $\vec{n}$  i  $\vec{V}$  są równoległe i zgodne)
- $\theta = \pi/2$  - statyczny ( $\vec{n}$  i  $\vec{V}$  są prostopadłe płyn omywa powierzchnię)
- $\theta = \pi$  - maksymalny przepływ: ( $\vec{n}$  i  $\vec{V}$  są równoległe i przeciwne)
- $\vec{V}_n = \vec{V} \cos \theta$  (składowa normalna wektora prędkości):



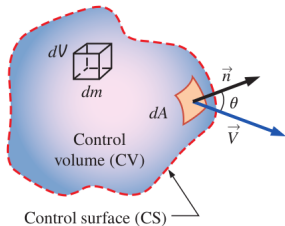
$$\vec{V}_n = \vec{V} \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{n} \quad (57)$$

Różniczkową szybkość przepływu możemy zapisać jako:

$$\delta \dot{m} = \rho V_n dA = \rho (V \cos \theta) dA = \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (58)$$

Całkowita szybkość przepływu:

$$\dot{m}_{net} = \int_{CS} \delta \dot{m} = \int_{CS} \rho V_n dA = \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (59)$$



Analizując:  $\vec{V}_n = \vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V} \cos \theta$  widzimy, że:

- $V_n < 0$  dla  $\theta < \pi/2$  - odpływ masy ( $\dot{m}_{net} < 0$ )
- $V_n > 0$  dla  $\theta < \pi/2$  - przyływ masy ( $\dot{m}_{net} > 0$ )

### Ogólna zasada zachowania masy

$$\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (60)$$

### Słownie:

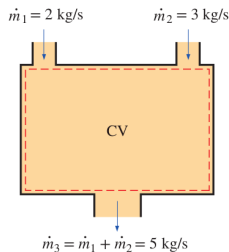
Zmiana ilości masy wewnątrz obszaru, który analizujemy, plus różnica między masą napływającą a masą wypływającą przez otaczającą ten obszar powierzchnię, wynosi zero

# Zasada zachowania masy - formalizm i pogłębienie - przepływ ustalony

Dla przepływu w warunkach stacjonarnych:

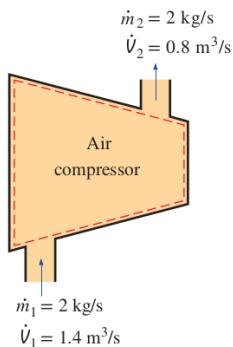
- $m_{CV} = \text{const}$
- bez znaczenia: **ilość masy** wchodzącej i wychodzącej:  $m$
- ważne: **strumień masy** wchodzącej i wychodzącej:  $\dot{m}$

Zasada zachowania masy:



$$\sum_{in} \dot{m} = \sum_{out} \dot{m} \quad [\text{kg/s}] \quad (61)$$

Całkowite tempo napływu masy do obszaru kontrolnego jest równe całkowitemu tempu jej wypływu.



Większość urządzeń: np. dysze, dyfuzory, turbiny, kompresory, pompy itd  
(są to urządzenia jedno strumieniowe 1 - wejście, 2 - wyjście)

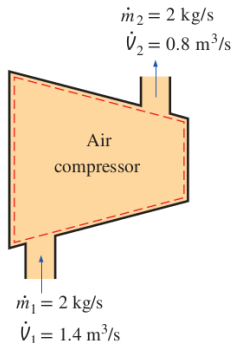
$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad (62)$$

co daje:

$$\rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (63)$$

*Porównaj - prawo ciągłości strugi*

Większość urządzeń: np. dysze, dyfuzory, turbiny, kompresory, pompy itd  
(są to urządzenia jedno strumieniowe 1 - wejście, 2 - wyjście)



$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \quad \text{co daje:} \quad \rho_1 V_1 A_1 = \rho_2 V_2 A_2 \quad (64)$$

Dla płynów nieściśliwych, dla warunków ustalonych:  $\sum_{in} \dot{V} = \sum_{out} \dot{V}$  mamy:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad \text{co daje:} \quad V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (65)$$

**Uwaga!**

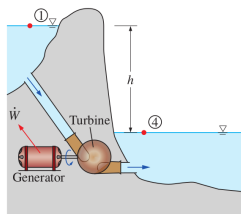
**Nie ma zasady zachowania objętości!**

**Równania (64) i (65) dla gazów - ostrożnie (ściśliwość), dla cieczy - uważnie.**

## Definicja

Forma energii, która może być w pełni i bezpośrednio przekształcona na pracę mechaniczną przez idealne urządzenie mechaniczne, np. idealna turbina.

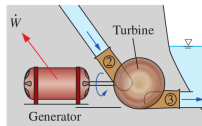
- pompa przekazuje energię mechaniczną płynowi, zwiększając jego ciśnienie,
- turbina pobiera energię mechaniczną z płynu, obniżając jego ciśnienie
  - ciśnienie płynu w ruchu związane jest z jego energią mechaniczną.
  - jednostka ciśnienia  $Pa = N/m^2 = N \cdot m/m^3 = J/m^3$  - energia/objętość
- iloczyn  $Pv$  lub jego równoważnik  $P/\rho$  [J/kg] - energia/masa
- ciśnienie nie jest formą energii!! - miara zgromadzonej energii potencjalnej na jednostkę objętości
- siła parcia działająca na płyn na pewną odległość wykonuje pracę - pracą przepływu
  - związana z ruchem płynu.
- praca przepływu  $\rightarrow$  energia przepływu



$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}} = \dot{m} g(z_1 - z_4) = \dot{m} g h$$

since  $P_1 \approx P_4 = P_{\text{atm}}$  and  $V_1 = V_4 \approx 0$

(a)



$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}} = \dot{m} \frac{P_2 - P_3}{\rho} = \dot{m} \frac{\Delta P}{\rho}$$

since  $V_2 \approx V_3$  and  $z_2 \approx z_3$

(b)

Energia mechaniczna przepływającego płynu:

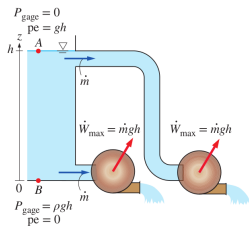
$$e_{\text{mech}} = \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz$$

$P/\rho$  - energia przepływu,  $V^2/2$  - energia kinetyczna,  $gz$  - energia potencjalna

Zmiana energii mechanicznej płynu (nieściśliwego)

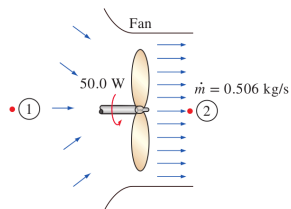
$$\Delta e_{\text{mech}} = \frac{P_2 - P_1}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) \quad (66)$$

- $\Delta e_{\text{mech}} > 0$  - praca wykonana nad płynem,
- $\Delta e_{\text{mech}} < 0$  - praca wykonana przez płyn
- $\dot{W}_{\max} = \dot{m} \Delta e_{\text{mech}}$  - moc maksymalna na turbinie



Zbiornik wypełniony wodą do wysokości  $h$ :

- ciśnienie manometryczne:  $p_{gage,A} = 0$ ,  $p_{gage,B} = \rho gh$
- energia potencjalna (na jednostkę masy):  $e_A = gh$ ,  $e_B = 0$  J
- praca idealnej turbiny hydraulicznej:  $\dot{W}_{max} = \dot{m}gh$ 
  - pobieranie wody z góry
  - pobieranie wody z dołu



$$V_1 \approx 0, V_2 = 12.1 \text{ m/s}$$

$$z_1 = z_2$$

$$P_1 \approx P_{\text{atm}} \text{ and } P_2 \approx P_{\text{atm}}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{mech, fan}} &= \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech, fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} = \frac{\dot{m} V_2^2 / 2}{\dot{W}_{\text{shaft, in}}} \\ &= \frac{(0.506 \text{ kg/s})(12.1 \text{ m/s})^2 / 2}{50.0 \text{ W}} \\ &= 0.741 \end{aligned}$$

Transfer energii mech. - obracający się wał (praca wałowa - *ang. shaft work*)

- pompa, wentylator  $w_{\text{shaft}} \rightarrow e_{\text{mech, fluid}}$
- turbina  $e_{\text{mech, fluid}} \rightarrow w_{\text{shaft}}$
- proces nieodwracalny np. tarcie
- **wydajność mechaniczna:**

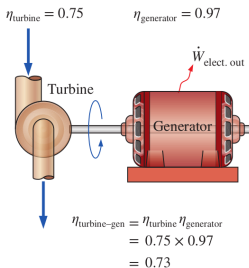
$$\eta_{\text{mech}} = \frac{E_{\text{mech, out}}}{E_{\text{mech, in}}} = 1 - \frac{E_{\text{mech, loss}}}{E_{\text{mech, in}}} \quad (67)$$

- np. wiatrak -  $e_{\text{mech, loss}} \approx 25\% \rightarrow$  straty energii spowodowane tarciem

Dla przepływu płynów:

- wzrost: ciśnienia, szybkości, poziomu lustra płynu ( $\uparrow e_{fluid}$ )
  - pompa, wentylator, kompresor (*ang. pump*)
- wydobywanie energii mechanicznej z płyny ( $\downarrow e_{fluid}$ )
  - wzrost szybkości wału w generatorze

Sprawność pompy i sprawność turbiny:



$$\eta_{\text{pump}} = \frac{\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}}{\dot{W}_{\text{shaft,in}}} = \frac{\dot{W}_{\text{pump,u}}}{\dot{W}_{\text{pump}}} \quad (68)$$

$$\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}} = \dot{E}_{\text{mech,out}} - \dot{E}_{\text{mech,in}} = \dot{W}_{\text{pump,u}} - \text{praca użyteczna pompy}$$

$$\eta_{\text{turbine}} = \frac{\dot{W}_{\text{shaft,out}}}{|\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}|} = \frac{\dot{W}_{\text{turbine}}}{\dot{W}_{\text{turbine,e}}} \quad (69)$$

$$|\Delta \dot{E}_{\text{mech,fluid}}| = \dot{E}_{\text{mech,in}} - \dot{E}_{\text{mech,out}} = \dot{W}_{\text{turbine,e}}$$

- szybkość spadku energii mechanicznej płynu
- energia wydobyta z płynu przez turbinę

Sprawność silnika i sprawność generatora

$$\eta_{motor} = \frac{\dot{W}_{shaft,out}}{\dot{W}_{elect,in}} \quad (70)$$

$$\eta_{generator} = \frac{\dot{W}_{elect,out}}{\dot{W}_{shaft,in}} \quad (71)$$

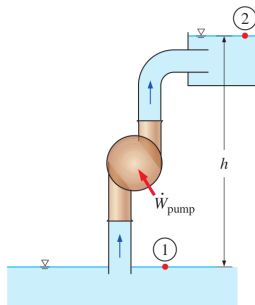
W większości przypadków:

- sprawność pompy - sprawność układu pompa - wał

$$\eta_{pump-motor} = \eta_{pump} \cdot \eta_{motor} = \frac{\dot{W}_{pump,u}}{\dot{W}_{elect,in}} = \frac{\Delta \dot{E}_{mech,fluid}}{\dot{W}_{elect,in}} \quad (72)$$

- sprawność turbiny - sprawność układu turbina - generator

$$\eta_{turbine-gen} = \eta_{turbine} \cdot \eta_{generator} = \frac{\dot{W}_{elect,out}}{\dot{W}_{turbine,e}} = \frac{\dot{W}_{elect,out}}{|\Delta \dot{E}_{mech,fluid}|} \quad (73)$$



Steady flow

$$V_1 = V_2 \approx 0$$

$$z_2 = z_1 + h$$

$$P_1 = P_2 = P_{\text{atm}}$$

$$\dot{E}_{\text{mech}, \text{in}} = \dot{E}_{\text{mech}, \text{out}} + \dot{E}_{\text{mech}, \text{loss}}$$

$$\dot{W}_{\text{pump}} + \dot{m}gz_1 = \dot{m}gz_2 + \dot{E}_{\text{mech}, \text{loss}}$$

$$\dot{W}_{\text{pump}} = \dot{m}gh + \dot{E}_{\text{mech}, \text{loss}}$$

Dla układów, które obejmują tylko mechaniczne formy energii i jej transfer w postaci pracy wałowej:

$$E_{\text{mech}, \text{in}} - E_{\text{mech}, \text{out}} = \Delta E_{\text{mech}, \text{sustem}} + E_{\text{mech}, \text{loss}} \quad (74)$$

$E_{\text{mech}, \text{loss}}$  - konwersja energii mechanicznej na:

- termiczną i/lub
- 6 straty spowodowane tarciem

Dla układu pracującego w warunkach stacjonarnych:

$$\dot{E}_{\text{mech}, \text{in}} = \dot{E}_{\text{mech}, \text{out}} + \dot{E}_{\text{mech}, \text{loss}}$$

## Definicja

Zależność między ciśnieniem, prędkością i wysokością, obowiązująca w obszarach ustalonego, nieściśliwego przepływu płynu, gdzie siły tarcia są zanedbywalnie małe w porównaniu do sił bezwładności, grawitacyjnych lub ciśnienia.

Z II ZD Newtona wzdłuż kierunku  $s$ :

$$\sum F_s = ma_s \quad (75)$$

Siły ciśnienia (z dwóch stron) + składowa siły grawitacji ( $W_s = W \sin \theta$ )

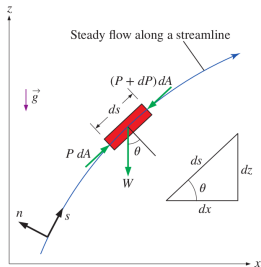
$$P \cdot dA - (P + dP) \cdot dA - W \cdot \sin \theta = m \cdot V \cdot \frac{dV}{ds} \quad (76)$$

podstawiając:  $m = V\rho = \rho dA ds$ ,  $W = mg = \rho \cdot g \cdot dA \cdot ds$ ,  $\sin \theta = dz/ds$

$$-dP \cdot dA - \rho \cdot g \cdot dA \cdot ds \cdot \frac{dz}{ds} = \rho \cdot dA \cdot ds \cdot V \cdot \frac{dV}{ds} \quad (77)$$

dzieląc przez  $dA$  otrzymujemy:

$$-dP - \rho \cdot g \cdot dz = \rho \cdot V \cdot dV \quad (78)$$



uwzględniając:  $VdV = \frac{1}{2}d(V^2)$  i dzieląc obustronnie przez  $\rho$ :

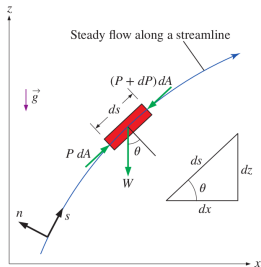
$$\frac{dP}{\rho} + \frac{1}{2}d(V^2) + g dz = 0 \quad (79)$$

Całkując (dla warunków stacjonarnego przepływu):

$$\int \frac{dP}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant} \quad (80)$$

Dla płynu nieściśliwego:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gz = \text{constant} \quad (81)$$



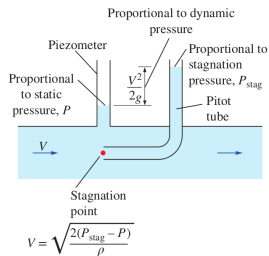
$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \text{constant}$$

- Suma energii kinetycznej, potencjalnej i przepływowej cząsteczki płynu jest stała podczas przepływu ustalonego, gdy przyczynki od tarcia i ściśliwości są zanedbywalnie małe.
  - wzajemna transformacja różnych form energii mechanicznej
  - całkowita suma energii mechanicznej stała
- Równanie Bernoulliego = zasada zachowania energii mechanicznej
- Praca wykonana przez siły ciśnienia i/lub grawitacyjne na cząsteczkę płynu jest równa wzrostowi jej energii kinetycznej.

$$\frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + z = \text{constant} \quad \text{lub} \quad P + \frac{\rho V^2}{2} + \rho g z = \text{constant} \quad (82)$$

- $P/g\rho$ , wyraża energię potencjalną ciśnienia cieczy - ciśnienie statyczne, [m]
  - tzw. piezometryczna wysokość ciśnienia
- $V^2/2g$ , wyraża właściwą energię kinetyczną przepływającej cieczy - ciśnienie dynamiczne, [m]
  - tzw. dynamiczna wysokość ciśnienia,
  - wysokość, na którą może wznieść się strumień wypływający pionowo w górę z prędkością początkową  $V_0$
- $z$ , wyraża energię potencjalną położenia cieczy - ciśnienie geometryczne, [m]

# Równanie Bernoulliego



Ciśnienie stagnacyjne (całkowite) = ciśnienie statyczne + dynamiczne w danym punkcie przepływu.

$$P_{stag} = P + \rho \frac{V^2}{2} \quad (83)$$

prędkość cząsteczki płynu w tym punkcie:

$$V = \sqrt{\frac{2(P_{stag} - P)}{\rho}} \quad (84)$$

# Równanie Bernoulliego - ograniczenia

## ❶ Przepływ stacjonarny

- nie powinno być używane podczas okresów przejściowego rozruchu i wyłączania, ani w okresach zmiany warunków przepływu

## ❷ Zaniedbywalna lepkość

- krótki odcinek przepływu, duży przekrój poprzeczny, niskie prędkości przepływu
- długie i wąskie przepływy w przewężeniach, wysoka prędkość przepływu
- bliskość powierzchni stałych, wzdłuż linii prądu w obszarze rdzenia przepływu,

## ❸ Brak pracy wałowej

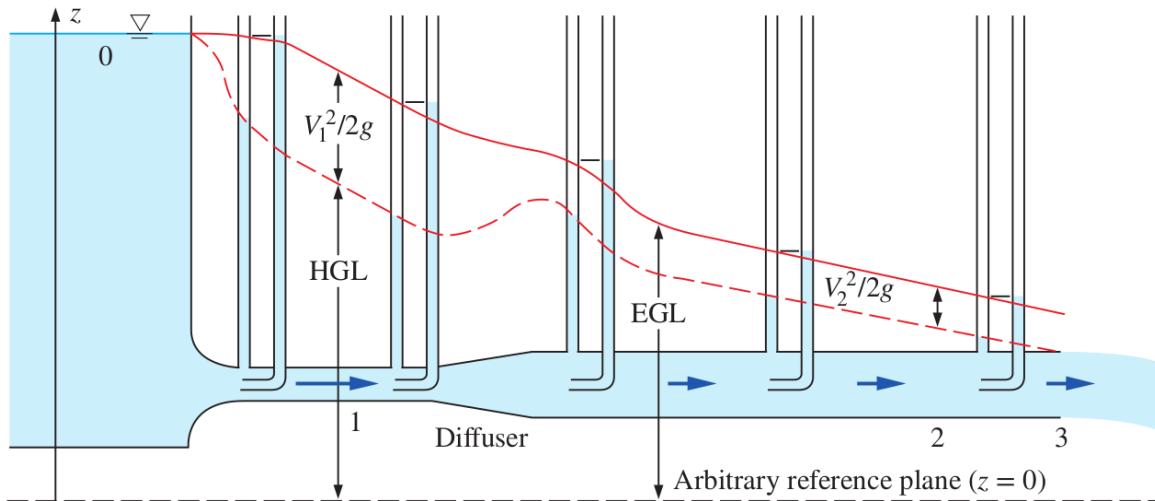
- nie jest stosowane w przekroju przepływu, który obejmuje pompę, turbinę, wentylator lub inne urządzenie lub wirnik (bilans energii), ale może być stosowane do przekroju przepływu przed lub po urządzeniu

## ❹ Przepływ nieściśliwy

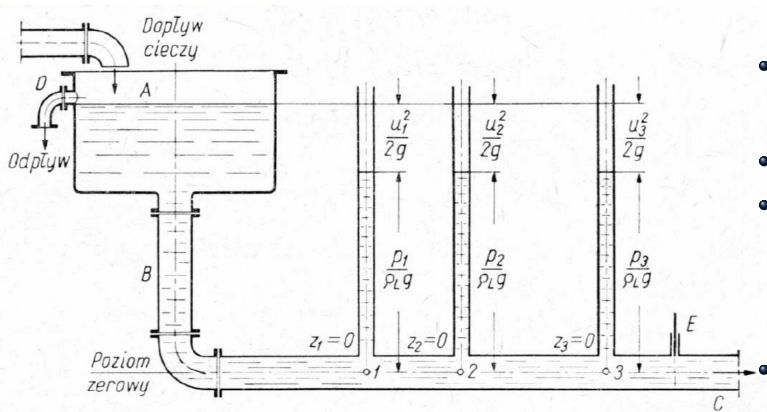
## ❺ Zaniedbywalny przepływ ciepła

- gęstość gazu jest odwrotnie proporcjonalna do temperatury - nie powinno być stosowane dla przekrojów przepływu, które obejmują znaczące zmiany temperatury, takie jak sekcje ogrzewania lub chłodzenia

## Hydraulic Grade Line (HGL) i Energy Grade Line (EGL)

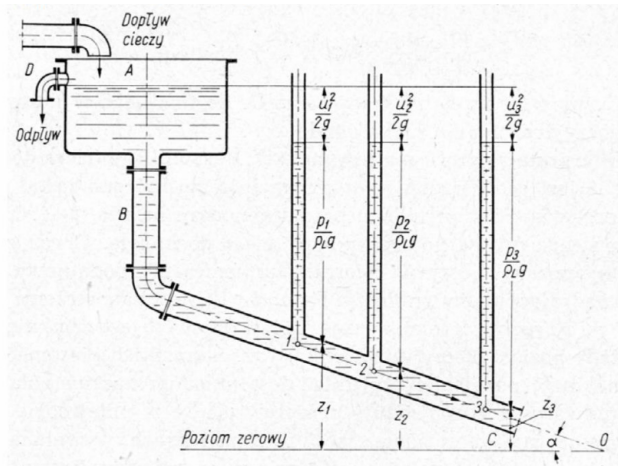


# Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla cieczy doskonałej



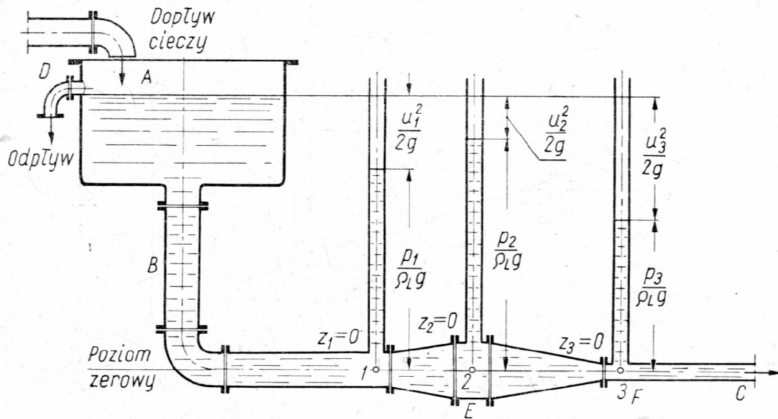
- Równoległy, poziomy przebieg przewodu do poziomu odniesienia
- Stały przekrój przewodu,  $w = const$
- Niezmiennność wysokości:
  - odniesienia,
  - ciśnienia statycznego,
  - dynamicznego.
- Stała suma ciśnienia całkowitego

# Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla cieczy doskonałej



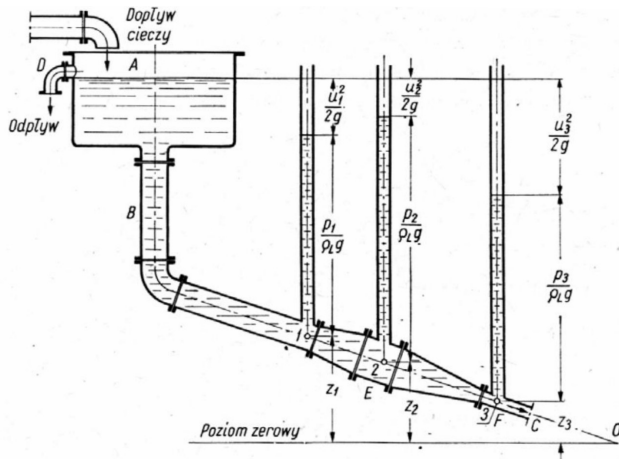
- Przewód pod kątem  $\alpha$  do poziomu
- Stały przekrój przewodu,  $w = \text{const}$
- Zmienność wysokości:
  - odniesienia,
  - ciśnienia statycznego,
- Niezmienniczość ciśnienia dynamicznego
- Stała suma ciśnienia całkowitego

# Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla cieczy doskonałej



- Równoległy, poziomy przebieg przewodu do poziomu odniesienia
- Różny przekrój przewodu,  $w \neq const$
- Zmienność wysokości:
  - ciśnienia statycznego,
  - ciśnienia dynamicznego.
- Niezmienniczość wysokości odniesienia
- Stała suma ciśnienia całkowitego

# Interpretacja graficzna równania Bernoulliego dla cieczy doskonałej

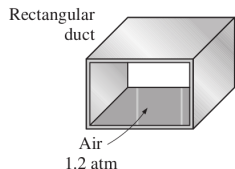
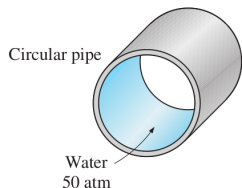


- Przewód pod kątem  $\alpha$  do poziomu
- Różny przekrój przewodu,  $w \neq const$
- Zmienność wysokości:
  - odniesienia,
  - ciśnienia statycznego,
  - ciśnienia dynamicznego
- Stała suma ciśnienia całkowitego

Wyróżniamy dwa możliwe przepływy płynów:

- wewnątrz przewodów (rury, kolanka, trójniki, zawory, itd.)
  - płyn wypełnia całkowicie cały przekrój poprzeczny przewody
  - ruch spowodowany różnicą ciśnień
- otwarty (rzeki, zbiorniki, akweny, itd.)
  - płyn wypełnia częściowo cały przekrój poprzeczny
  - wywołany siłą grawitacji

# Przepływ płynów przez przewody



Typy przewodów:

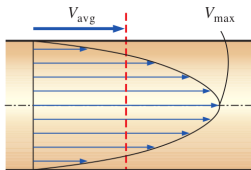
- przepływ cieczy, przekrój kołowy
  - wysokie różnice ciśnień (rurociągi, gazociągi, el. instalacji, itd)
- przepływ gazów, przekrój niekołowy
  - niska różnica ciśnień
  - systemy chłodzenia, ogrzewania w budynkach
  - niższe koszty, łatwiejszy montaż

Profil prędkości ( $u(r)$ ) cząsteczek płynu wewnątrz przewodu (płyn nieściśliwy)

- przy brzegu - 0 m/s, w osi przewodu,  $V_{max}$ ,
- $V_{avg}$  - stała podczas przepływu ( $A = \text{const}$ )

Uwaga! Przewody grzewcze/chłodzące - możliwa zmiana  $V_{avg} - \rho(T) \rightarrow T_{avg}$

Określenie  $V_{avg}$ :

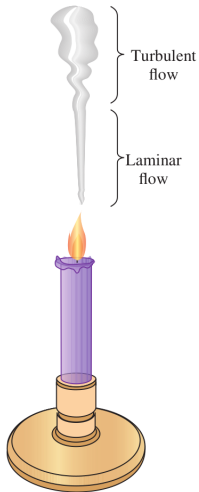


$$\dot{m} = \rho V_{avg} A_c = \int_{A_c} \rho u(r) dA_c \quad (85)$$

Prędkość średnia płynu (nieściśliwego) w przewodzie o przekroju kołowym,  $R$ :

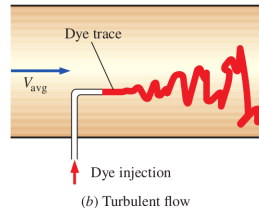
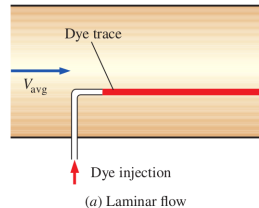
$$V_{avg} = \frac{\int_{A_c} \rho u(r) dA_c}{\rho A_c} = \frac{\int_0^R \rho u(r) 2\pi r dr}{\rho \pi R^2} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr \quad (86)$$

# Przepływ płynów przez przewody - charakter przepływu

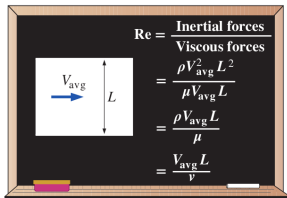


## Ruch płynu:

- laminarny (wysoka lepkość, np oleje)
  - gładki strumień
  - bardzo uporządkowany ruch
- turbulentny (większość płynów, ciecze/gazy)
  - fluktuacje prędkości
  - silnie nieuporządkowany ruch
- przejściowy
  - przedział z ruchem laminarnym/turbulentnym



# Przepływ płynów przez przewody - liczba Reynoldsa



Przejście od przepływu laminarnego do turbulentnego zależy od:

- geometrii, chropowatości powierzchni
- prędkości przepływu, temperatury powierzchniowej
- rodzaju cieczy (np. lepkość, gęstość)

Osborne Reynolds odkrył, że reżim przepływu zależy głównie od stosunku sił bezwładności do sił lepkości w cieczy - liczba Reynoldsa

$$Re = \frac{\rho V_{avg} D}{\nu} = \frac{V_{avg} D}{\mu} \quad [-] \quad (87)$$

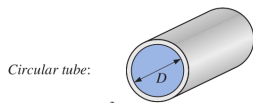
- płyn:  $\rho$  - gęstość płynu,  $V_{avg}$  - prędkość średnia,  $\mu$  - lepkość dynamiczna,  $\nu$  - lepkość kinematyczna,
- przewód:  $D$  - wymiar charakterystyczny ( $D \rightarrow D_h$ )

$Re \lesssim 2300$  przepływ laminarny

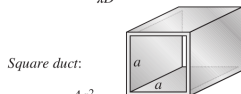
$2300 \lesssim Re \lesssim 4000$  przepływ przejściowy

$Re \gtrsim 4000$  przepływ turbulentny

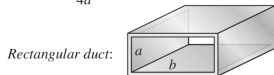
# Przepływ płynów przez przewody - średnica hydrauliczna



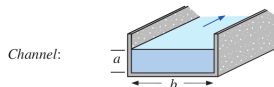
$$D_h = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$$



$$D_h = \frac{4a^2}{4a} = a$$



$$D_h = \frac{4ab}{2(a+b)} = \frac{2ab}{a+b}$$



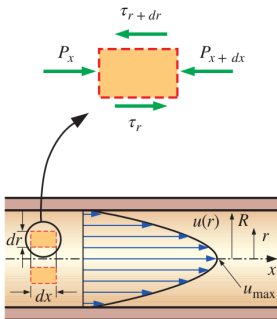
$$D_h = \frac{4ab}{2a+b}$$

$$D_h = \frac{4A_c}{O} \quad (88)$$

Gdzie:

- $A_c$  - przekrój przewodu
- $O$  - obwód obmywany

- pierścień o promieniu  $r$ , grubości  $dr$ , długości  $dx$ , współosiowy z przewodem
- efekty ciśnienia i lepkości - siły ciśnienia i ścinające w równowadze
- bilans sił:



$$(2\pi r dr P)_x - (2\pi r dr P)_{x+dx} + (2\pi r dx \tau)_r - (2\pi r dx \tau)_{r+dr} = 0 \quad (89)$$

dzieląc przez:  $(2\pi r dr dx)$  i przegrupowując, otrzymujemy:

$$r \frac{P_{x+dx} - P_x}{dx} + \frac{(r\tau)_{r+dr} - (r\tau)_r}{dr} = 0 \quad (90)$$

Obydwa liczniki w równaniu (90) to:  $dP$  i  $d(r\tau)$  stąd:

$$r \frac{dP}{dx} + \frac{d(r\tau)}{dr} = 0 \quad (91)$$

podstawiając:  $\tau = -\mu(du/dr)$ , dzieląc przez  $r$ , uwzględniając  $\mu = \text{const}$ :

$$\frac{\mu}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} \quad (92)$$

wielkość  $du/dr < 0 \rightarrow \tau > 0$ , lub:  $du/dr = -du/dy$  i  $y = R - r$ :  $f(r) = g(x)$

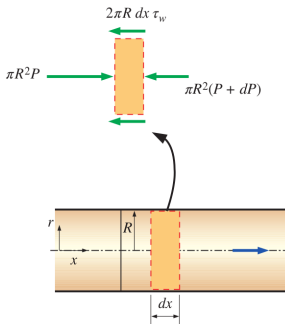
wtedy:  $dP/dx = \text{const}$ , stąd bilans sił dla el. o promieniu  $R$  i grubości  $dx$ :

$$\pi R^2 P - \pi R^2 (P + dP) - 2\pi R dx \tau_w = 0$$

upraszczając powyższy bilans sił, otrzymujemy:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{2\tau_w}{R} \quad (93)$$

z uwagi na stałość lepkości i prędkości:  $\tau_w = \text{const}$



równanie 92 można rozwiązać przez podwójne całkowanie otrzymując:

$$u(r) = \frac{r^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) + C_1 \ln r + C_2 \quad (94)$$

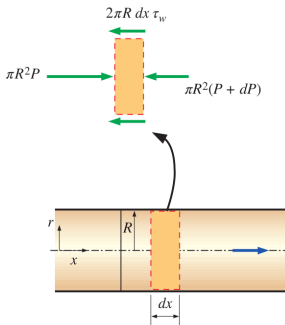
profil prędkości z warunków brzegowych:  $\partial u / \partial r = 0$  w  $r = 0$  i  $u = 0$  dla  $r = R$

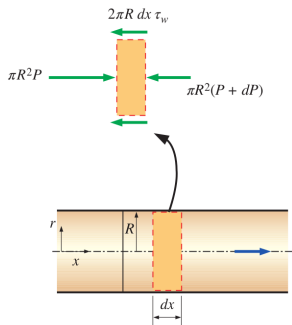
$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (95)$$

czyli profil prędkości ma charakter paraboliczny ( $u(r) \propto r^2$ )

szybkość średnia: podkładamy (95) do (86) i całkujemy:

$$V_{avg} = \frac{2}{R^2} \int_0^R u(r) r dr = -\frac{2}{R^2} \int_0^R \frac{R^2}{r\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) r dr = -\frac{R^2}{8\mu} \left( \frac{dP}{dx} \right) \quad (96)$$





łącząc równania (95) i (96) otrzymujemy:

$$u(r) = 2V_{avg} \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (97)$$

dla ruchu laminarnego,  $V_{max}$  jest dla  $r = 0$  (oś przewodu), stąd:

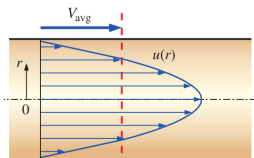
$$u_{max} = 2V_{avg} \quad \text{lub} \quad V_{avg} = \frac{u_{max}}{2} \quad (98)$$

Dla ruchu laminarnego, szybkość średnia przepływu płynu przez przewód o przekroju kołowym to połowa szybkości maksymalnej.

# Profil prędkości $u(r)$ dla przepływu turbulentnego



# Profil prędkości $u(r)$ dla przepływu turbulentnego

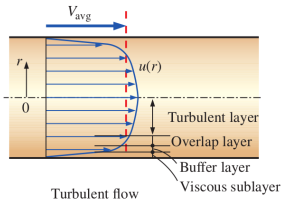


Laminar flow

Prędkość średnia dla przepływu:

- laminarnego równanie (98)

$$V_{avg} = 0,5 \cdot u_{max}$$



Turbulent flow

- turbulentnego

$$V_{avg} = 0,85 \cdot u_{max} \quad (99)$$

Spadek ciśnienia  $\Delta P$  - wiemy, że:  $dP/dx = \text{const}$ , całkując od  $x = x_1 \rightarrow P_1$  do  $x = x_1 + L \rightarrow P_2$ :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{P_2 - P_1}{L} \quad (100)$$

Podstawiając równanie (96) dla ruchu laminarnego:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\mu L V_{avg}}{R^2} = \frac{32\mu L V_{avg}}{D^2} \quad (101)$$

W praktyce **ogólne** równanie na stratę ciśnienia:

$$\Delta P_L = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho V_{avg}^2}{2} \quad (102)$$

gdzie  $\rho V_{avg}^2/2$  - to ciśnienie dynamiczne, a  $f$  - współczynnik tarcia Darcy'ego (Darcy'ego-Weisbacha):

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho V_{avg}^2} \quad (103)$$

Przyrównując równania (101) oraz (102) i rozwiązując względem  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho DV_{avg}} = \frac{64}{Re} \implies \lambda = f(Re) \quad (104)$$

Dla ruchu laminarnego, przepływ przewodem o przekroju kołowym

Spadek ciśnienia ( $\Delta P$ ) vs. strata ciśnienia ( $h_L$ ):

$$\Delta P = \rho g h \implies h = \frac{\Delta P}{\rho g} \quad \text{zamieniając } \Delta P \rightarrow \Delta P_L \text{ otrzymamy:}$$

$$h_L = \frac{\Delta P_L}{\rho g} = \lambda \frac{L}{D} \frac{V_{avg}^2}{2g} \quad (105)$$

Strata ciśnienia ( $h_L$ ) reprezentuje dodatkową wysokość, o jaką płyn musi zostać podniesiony przez pompę, aby pokonać straty tarcia w rurociągu.

$$h_{str} = \lambda \frac{l}{d_{zast}} \cdot \frac{w^2}{2g}$$

- strata ciśnienia na pokonania tarcia jest proporcjonalna do długości  $l$  rury i ciśnienia dynamicznego  $w^2/2g$  i odwrotnie proporcjonalna do średnicy  $d$  rury,
- $\lambda$  - współczynnik oporu hydraulicznego/współczynnik tarcia,
- $\lambda$  - bezwymiarową, zależny od rodzaju przepływu cieczy i chropowatości ścianek rurociągu.

Przy przepływie uwarstwionym  $\lambda$  zależy tylko od wielkości liczby  $Re$ :

$$\lambda = \frac{a}{Re} \quad (106)$$

Przy przepływie burzliwym  $\lambda$  jest funkcją nie tylko liczby  $Re$ , ale i chropowatości ścianek rury  $k$ .

Chropowatość rur (tzw. chropowatość względna) -  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{k}{d} \quad (107)$$

$k$  - chropowatość bezwzględna,  $d$  - średnicy rury:

Współczynnik oporu hydraulicznego:  $30 \cdot Re^{-0,875} > \varepsilon$  - przewód hydraulicznie gładki

Współczynnik  $\lambda$  jest funkcją liczby Reynoldsa.

Do obliczenia  $\lambda$  można zastosować jedno z poniższych równań:

Równanie Blasiusa ( $3 \cdot 10^3 < Re < 5 \cdot 10^5$ )

$$\lambda = \frac{0,3164}{Re} \quad (108)$$

Równanie Generaux ( $4 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^7$ )

$$\lambda = \frac{0,16}{Re} \quad (109)$$

Współczynnik oporu hydraulicznego:  $30 \cdot Re^{-0,875} > \varepsilon$  - przewód hydraulicznie gładki

Równanie Konakowa:

$$\lambda = [1,8 \log(Re) - 1,5]^{-2} \quad (110)$$

Równanie Koo ( $3 \cdot 10^3 < Re < 3 \cdot 10^6$ )

$$\lambda = 0,0052 + \frac{0,5}{Re^{0,32}} \quad (111)$$

Równanie Nikuradse ( $Re > 10^5$ )

$$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{Re^{0,237}} \quad (112)$$

Równanie Hermannia ( $10^5 < Re < 2 \cdot 10^6$ )

$$\lambda = 0,0054 + \frac{0,396}{Re^{0,3}} \quad (113)$$

Współczynnik oporu hydraulicznego:  $30 \cdot Re^{-0,875} \leq \varepsilon$  - nie jest hydraulicznie gładki

Współczynnik  $\lambda$  jest funkcją szorstkości względnej  $\varepsilon$ :

Równanie Heringa

$$\lambda = \left[ 2 \log \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) + 1,138 \right]^{-2} \quad (114)$$

Równanie Karmana-Nikuradse ( $10^4 < Re < 10^7$ )

$$\lambda = \left[ 2 \log \left( \frac{1}{2\varepsilon} \right) + 1,74 \right]^{-2} \quad (115)$$

W całym zakresie przepływu turbulentnego obowiązuje równanie Prandtl'a:

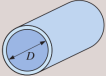
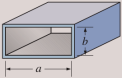
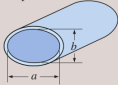
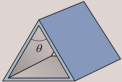
$$2\sqrt{\lambda} \cdot \log(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8\sqrt{\lambda} = 1 \quad (116)$$

lub równanie Colebrooke'a-White'a:

$$-2\sqrt{\lambda} \cdot \log \left( \frac{2,51\sqrt{\lambda}}{\lambda \cdot Re} + \frac{\varepsilon}{3,71} \right) = \frac{1}{\lambda} \quad (117)$$

# Przepływ laminarny w przewodach nie kołowych

Friction factor for fully developed *laminar flow* in pipes of various cross sections ( $D_h = 4A_c/p$  and  $Re = V_{avg} D_h/\nu$ )

| Tube Geometry                                                                                           | $a/b$<br>or $\theta^\circ$ | Friction Factor<br>$f$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------|
| Circle<br>             | —                          | $64.00/Re$             |
| Rectangle<br>          | $a/b$                      |                        |
|                                                                                                         | 1                          | $56.92/Re$             |
|                                                                                                         | 2                          | $62.20/Re$             |
|                                                                                                         | 3                          | $68.36/Re$             |
|                                                                                                         | 4                          | $72.92/Re$             |
|                                                                                                         | 6                          | $78.80/Re$             |
|                                                                                                         | 8                          | $82.32/Re$             |
|                                                                                                         | $\infty$                   | $96.00/Re$             |
| Ellipse<br>            | $a/b$                      |                        |
|                                                                                                         | 1                          | $64.00/Re$             |
|                                                                                                         | 2                          | $67.28/Re$             |
|                                                                                                         | 4                          | $72.96/Re$             |
|                                                                                                         | 8                          | $76.60/Re$             |
|                                                                                                         | 16                         | $78.16/Re$             |
| Isosceles triangle<br> | $\theta$                   |                        |
|                                                                                                         | $10^\circ$                 | $50.80/Re$             |
|                                                                                                         | $30^\circ$                 | $52.28/Re$             |
|                                                                                                         | $60^\circ$                 | $53.32/Re$             |
|                                                                                                         | $90^\circ$                 | $52.60/Re$             |
|                                                                                                         | $120^\circ$                | $50.96/Re$             |

Znając  $(\Delta P / h_L)$  możemy dobrać moc pompy jako:

$$\dot{W}_{pump,L} = \dot{V} \Delta P_L = \dot{V} \rho g h_L = \dot{m} g h_L \quad (118)$$

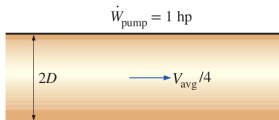
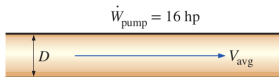
$(V_{avg})$  z równania (101) dla przewodu poziomego (ruchu laminarny):

$$V_{avg} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8 \mu L} = \frac{(P_1 - P_2) D^2}{32 \mu L} = \frac{\Delta P D^2}{32 \mu L} \quad (119)$$

Stąd  $\dot{V}$  dla przepływu poziomego przez przewód kołowy  $(D, L)$ :

$$\dot{V} = V_{avg} A_c = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8 \mu L} \pi R^2 = \frac{(P_1 - P_2) \pi D^2}{128 \mu L} = \frac{\Delta P \pi D^2}{128 \mu L} \quad (120)$$

Równanie (120) znane jest jako równanie Poiseuille'a



Równanie Poiseuille'a:

$$\dot{V} = V_{avg} A_c = \frac{(P_1 - P_2) \pi R^4}{8 \mu L} = \frac{\Delta P \pi D^2}{128 \mu L} \Rightarrow \Delta P = \frac{128 \dot{V} \mu L}{\pi D^2}$$

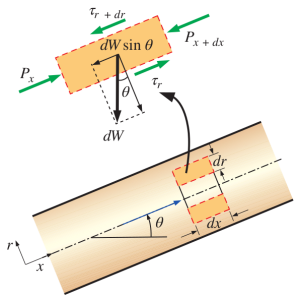
Dla określonej wartości przepływu, spadek ciśnienia a zatem i wymagana moc pompy są proporcjonalne do długości rury i lepkości płynu, ale są odwrotnie proporcjonalne do drugiej potęgi średnicy (czwartej promienia) przewodu.

Dla przepływów nie poziomych (ogólnie), przy (możliwej) zmianie średnicy:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + z_1 + h_{pump,u} = \frac{P_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_{turbine,e} + h_L \quad (121)$$

- $V_{1,2}$  - prędkości średnie w przekrojach 1 i 2,
- $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  - współczynniki korekcyjne do energii kinetycznej,
  - $\alpha = 2$  dla ruchu laminarnego,
  - $\alpha = 1,05$  dla turbulentnego
- $h_L$  - strata ciśnienia wywołana tarciem pomiędzy 1 i 2
- $h_{pump,u}$  - od pompy do płynu
- $H_{turbine,e}$  - od płynu do turbiny

## Spadek i strata ciśnienia - wpływ siły grawitacji



Wpływ siły grawitacji na przepływ:

- horyzontalny - zanedbywalnie mały
- niehoryzontalny - istotny

Siła (składowa) ciężkości płynu:

$$dW_x = dW \sin \theta = \rho g dV_{el} \sin \theta = \rho g (2\pi r dr dx) \sin \theta \quad (122)$$

Bilans sił:

$$(2\pi r dr P)_x - (2\pi r dr P)_{x+dx} + (2\pi r dx \tau)_r - (2\pi r dx \tau)_{r+dr} - \rho g (2\pi r dr dx) \sin \theta = 0 \quad (123)$$

Równanie (123) można przekształcić do równania różniczkowego:

$$\frac{u}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dP}{dx} + \rho g \sin \theta \quad (124)$$

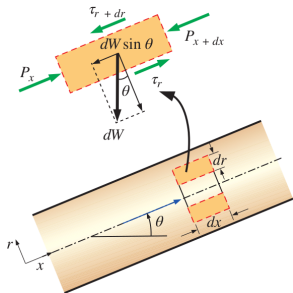
Postępując analogicznie jak wcześniej, otrzymamy:

$$u(r) = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{dP}{dx} + \rho g \sin \theta \right) \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (125)$$

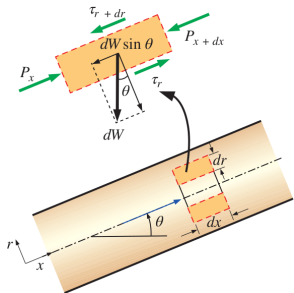
Stąd  $V_{avg}$  i  $\dot{V}$  dla niehoryzontalnego laminarnego przepływu płynu:

$$V_{avg} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) D^2}{32\mu L} \quad \text{ i } \quad \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) \pi D^2}{128\mu L} \quad (126)$$

analogicznie jak dla horyzontalnych, ale:  $\Delta P \rightarrow \Delta P - \rho g L \sin \theta$



## Analiza



$$V_{avg} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) D^2}{32 \mu L} \quad \text{i} \quad \dot{V} = \frac{(\Delta P - \rho g L \sin \theta) \pi D^2}{128 \mu L}$$

- dla  $\theta > 0$ ,  $\sin \theta > 0$  - wznios
- dla  $\theta < 0$ ,  $\sin \theta < 0$  - spływ
- dla przepływów niepoziomych istotne:
  - różnica ciśnień
  - siły grawitacji

Straty wtórne:

- złączki, zawory, łuki, kolana, rozgałęzienia, wloty, wyjścia, zmiana przekroju
- **określane są eksperymentalnie**

Współczynnik strat  $K_L$ :

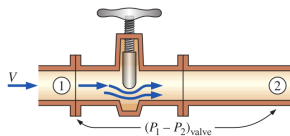
$$K_L = \frac{h_L}{V^2/2g} \quad (127)$$

gdzie:  $h_L$  - dodatkowa strata ciśnienia wynikająca z armatury:  $h_L = \Delta P/\rho g$ ,

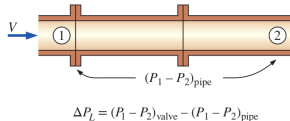
co daje:

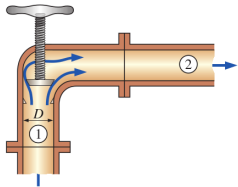
$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} \quad (128)$$

Pipe section with valve:



Pipe section without valve:

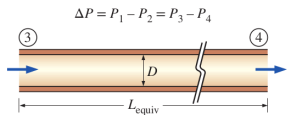




Straty wtórne a długość zastępcza ( $L_{equiv}$ ):

$$h_L = K_L \frac{V^2}{2g} = \lambda \frac{L_{equiv}}{D} \frac{V^2}{2g} \rightarrow L_{equiv} = \frac{D}{\lambda} K_L \quad (129)$$

Równania (128) i (129) są jednakowo stosowane w celu wyznaczenia  $h_L$ .



Całkowita strata ciśnienia:

$$h_{L,total} = h_{L,major} + h_{L,minor}$$

co możemy zapisać jako:

$$h_{L,total} = \sum_{i=1} \lambda_i \frac{L_i}{D_i} \frac{V_i^2}{2g} + \sum_{j=1} K_{L,j} \frac{V_j^2}{2g} \quad (130)$$

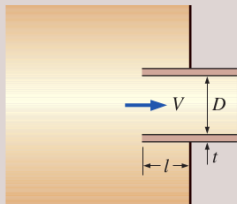
gdzie:  $i$  - odpowiada za przewody,  $j$  - odpowiada za armaturę. Dla  $D = \text{const}$ :

$$h_{L,total} = \left( \lambda \frac{L}{D} + \sum K_L \right) \frac{V^2}{2g} \quad (131)$$

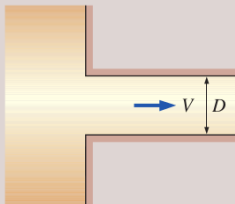
gdzie:  $V = \text{const}$  ponieważ  $D = \text{const}$ .

### Pipe Inlet

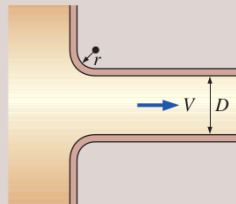
Reentrant:  $K_L = 0.80$   
( $t \ll D$  and  $l \approx 0.1D$ )



Sharp-edged:  $K_L = 0.50$

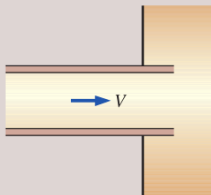


Well-rounded ( $r/D > 0.2$ ):  $K_L = 0.03$   
Slightly rounded ( $r/D = 0.1$ ):  $K_L = 0.12$   
(see Fig. 8-40)

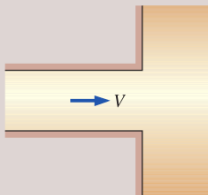


### Pipe Exit

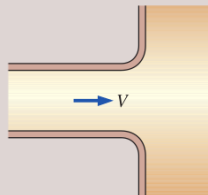
Reentrant:  $K_L = \alpha$



Sharp-edged:  $K_L = \alpha$



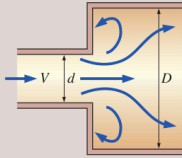
Rounded:  $K_L = \alpha$



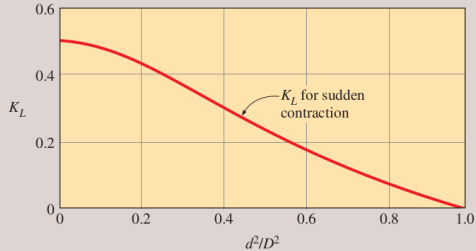
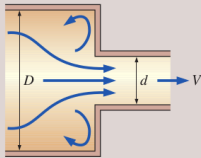
Note: The kinetic energy correction factor is  $\alpha = 2$  for fully developed laminar flow, and  $\alpha \approx 1.05$  for fully developed turbulent flow.

### Sudden Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

Sudden expansion:  $K_L = \alpha \left(1 - \frac{d^2}{D^2}\right)^2$



Sudden contraction: See chart.



### Gradual Expansion and Contraction (based on the velocity in the smaller-diameter pipe)

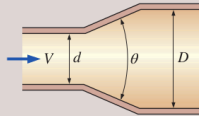
Expansion (for  $\theta = 20^\circ$ ):

$K_L = 0.30$  for  $d/D = 0.2$

$K_L = 0.25$  for  $d/D = 0.4$

$K_L = 0.15$  for  $d/D = 0.6$

$K_L = 0.10$  for  $d/D = 0.8$

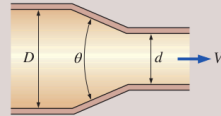


Contraction:

$K_L = 0.02$  for  $\theta = 30^\circ$

$K_L = 0.04$  for  $\theta = 45^\circ$

$K_L = 0.07$  for  $\theta = 60^\circ$

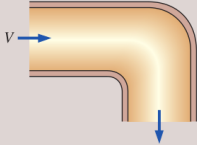


### Bends and Branches

90° smooth bend:

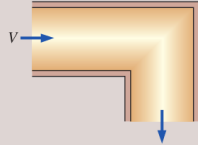
Flanged:  $K_L = 0.3$

Threaded:  $K_L = 0.9$



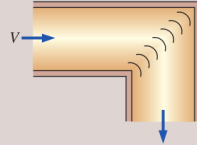
90° miter bend

(without vanes):  $K_L = 1.1$



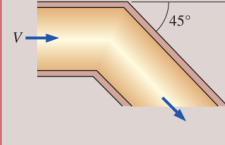
90° miter bend

(with vanes):  $K_L = 0.2$



45° threaded elbow:

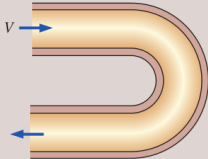
$K_L = 0.4$



180° return bend:

Flanged:  $K_L = 0.2$

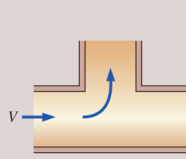
Threaded:  $K_L = 1.5$



Tee (branch flow):

Flanged:  $K_L = 1.0$

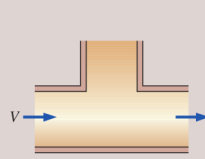
Threaded:  $K_L = 2.0$



Tee (line flow):

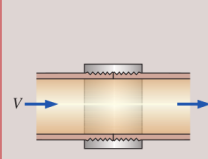
Flanged:  $K_L = 0.2$

Threaded:  $K_L = 0.9$



Threaded union:

$K_L = 0.08$



### Valves

Globe valve, fully open:  $K_L = 10$

Angle valve, fully open:  $K_L = 5$

Ball valve, fully open:  $K_L = 0.05$

Swing check valve:  $K_L = 2$

Gate valve, fully open:  $K_L = 0.2$

$\frac{1}{4}$  closed:  $K_L = 0.3$

$\frac{1}{2}$  closed:  $K_L = 2.1$

$\frac{3}{4}$  closed:  $K_L = 17$